https://t.me/ShekhawatiMission100

बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल ...

शेखावाटी मिशन 100

सत्र: 2024-25

(कक्षा: 12)

MATHS

पढ़ेगा राजस्थान

बढ़ेगा राजस्थान

विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट
डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम
QR CODE स्कैन करें

कार्यालय: संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

https://t.me/ShekhawatiMission100

संयोजक कार्यालय – संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

शेखावाटी मिशन - 100 मार्गदर्शक

बजरंग लाल

संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चूरू संभाग, चूरू

महेन्द्र सिंह बड़सरा

संभागीय कॉर्डिनेटर, शेखावाटी मिशन 100
संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

रामावतार भदाला

तकनीकी सहयोगी शेखावाटी मिशन 100

संकलनकर्त्ता टीम : गणित

जितेन्द्र फेनिन

शहीद जगमाल सिंह रा.उ.मा.वि.
रोरू बड़ी (सीकर)

मुकेश रेवाड़

पीएम श्री शहीद शकरूखान
रा.उ.मा.वि. मंगलूना (सीकर)

जयवीर फगेड़िया

रा.उ.मा.वि. कल्याणपुरा पुरोहितान
(सरदारशहर, चूरू)

निखलेश गौड

रा.उ.मा.वि. टाटनवा
धोद (सीकर)

राकेश धेतरवाल

रा.उ.मा.वि.
तारानगर (चूरू)

कार्यालय: संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

https://t.me/ShekhawatiMission100

प्रश्न–पत्र की योजना 2024–2025

कक्षा – **XII**
विषय – गणित
अवधि – 3 घण्टा 15 मिनट पूर्णांक– 80

1. उद्देश्य हेतु अंकभार–

क्र.सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत
1.	ज्ञान	24	30
2.	अवबोध	24	30
3.	ज्ञानोपयोग	16	20
4.	कौशल	8	10
5.	विश्लेषण	8	10
	योग	80	100

2. प्रश्नों के प्रकार वार अंकभार–

क्र.सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रति प्रश्न	कुल अंक	प्रतिशत (अंको का)	प्रतिशत (प्रश्नों का)	संभावित समय
1.	बहुविकल्पात्मक	18	1	18	22.5	33.96	36
2.	रिक्तस्थान	6	1	6	7.5	11.32	15
3.	अतिलघूत्तरात्मक	12	1	12	15.0	22.64	42
4.	लघूत्तरात्मक	10	2	20	25.0	18.87	40
5.	दीर्घउत्तरात्मक	4	3	12	15.0	7.55	32
6.	निबंधात्मक	3	4	12	15.0	5.66	30
	योग	53		80	100.00	100.00	195 मिनट

विकल्प योजना : खण्ड 'स' एवं 'द' में हैं।

3. विषय वस्तु का अंकभार–

क्र.सं.	विषय वस्तु	अंकभार	प्रतिशत
1	सम्बन्ध एवं फलन	3	3.75
2	प्रतिलोम त्रिकोणमिति फलन	4	5.00
3	आव्यूह	5	6.25
4	सारणिक	5	6.25
5	सांतत्य एवं अवकलनीयता	8	10.00
6	अवकलज के अनुप्रयोग	6	7.50
7	समाकलन	12	15.00
8	समाकलनों के अनुप्रयोग	4	5.00
9	अवकल समीकरण	6	7.50
10	सदिश बीजगणित	7	8.75
11	त्रिविमीय ज्यामिति	9	11.25
12	रैखिक प्रोग्रामन	4	5.00
13	प्रायिकता	7	8.75
	सर्वयोग	**80**	**100**

https://t.me/ShekhawatiMission100

प्रश्न–पत्र ब्ल्यूप्रिन्ट 2024–2025

कक्षा –XII   विषय :–गणित   समय 3:15 घन्टे   पूर्णांक–80

क्र.सं.	उद्देश्य इकाई / उपइकाई	ज्ञान						अवबोध						ज्ञानोपयोग						कौशल						विश्लेषण						योग
		बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघूत्तरात्मक	लघूत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघूत्तरात्मक	लघूत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघूत्तरात्मक	लघूत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघूत्तरात्मक	लघूत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघूत्तरात्मक	लघूत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	
1	सम्बन्ध एवं फलन	1(1)									2(1)																					3(2)
2	प्रतिलोम त्रिकोणमिति फलन								1(1)					1(1)			2(1)															4(3)
3	आव्यूह	1(1)		1(1)				1(1)																					2(1)			5(4)
4	सारणिक	1(1)							1(1)							1(1)													2(1)			5(4)
5	सांतत्य एवं अवकलनीयता	1(1)			2(1)			1(1)			2(1)					1(2)																8(6)
6	अवकलज के अनुप्रयोग	1(1)		1(2)					1(1)								2(1)															6(5)
7	समाकलन	1(1)			2(1)				1(1)			3*(1)	4*(1)			1(1)																12(6)
8	समाकलनों के अनुप्रयोग			1(1)													2(1)			1(1)												4(3)
9	अवकल समीकरण	1(1)				3*(1)				1(1)					1(1)																	6(4)
10	सदिश बीजगणित	1(1)		1(1)					1(1)		2(1)			1(1)						1(1)												7(6)
11	त्रिविमीय ज्यामिति	1(1)		1(1)								3*(1)																			4*(1)	9(4)
12	रैखिक प्रोग्रामन																								4*(1)							4(1)
13	प्रायिकता	1(1)		1(1)														3*(1)		1(2)												7(5)
	योग	10(10)		7(7)	4(2)	3(1)		2(2)	5(5)	1(1)	6(3)	6(2)	4(1)	2(2)	1(1)	4(4)	6(3)	3(1)		4(4)					4(1)				4(2)		4(1)	80(53)
	सर्वयोग	24(20)						24(14)						16(11)						8(5)						8(3)						80(53)

विकल्पों की योजना :– खण्ड 'स' एवं 'द' में प्रत्येक में एक आंतरिक विकल्प है नोटः–कोष्ठक के बाहर की संख्या 'अंकों' की तथा अंदर की संख्या 'प्रश्नों' के द्योतक है।

यह ब्लू प्रिंट केवल मॉडल प्रश्न पत्र का है, बोर्ड का प्रश्न पत्र निर्धारित पाठ्यक्रम एवं अंक योजनानुसार ही होगा।

https://t.me/ShekhawatiMission100

अध्याय – 1
सम्बन्ध एवं फलन

अंकभार (1 + 2 = 3)

1. मान लीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4} में, R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)} द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।
(1) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।
(2) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।
(3) R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।
(4) R एक तुल्यता संबंध है।

2. समुच्चय {1, 2, 3} में R = {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (1, 2) (2, 3)} द्वारा प्रदत संबंध है?
(1) स्वतुल्य (2) सममित (3) संक्रामक (4) तुल्यता

3. R से R में परिभाषित निम्न में से कौनसा फलन एकैकी है–
(1) F(x) = |x| (2) F(x) = cos x
(3) $F(x) = e^x$ (4) $F(x) = x^2$

4. समुच्चय A= {1, 2, 3, 4} से स्वयं तक सभी एकैकी फलन की संख्या होगी –
(1) 3 (2) 4 (3) 8 (4) 6

5. यदि R = $\{(x, y) : x,\ y \in z,\ \ x^2 + y^2 \le 4\}$ एक संबंध है तब R का प्रान्त होगा –
(1) {0, 1} (2) {-2, -1, 0, 1, 2}
(3) {2, -2} (4) {0, 1, 2}

6. यदि A = {1, 2, 3} हो तो अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है–
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

7. मान लीजिए कि $f : R \to R$, $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषिता है। सही उत्तर का चयन कीजिए।
(1) f एकैकी आच्छादक है (2) f बहुएक आच्छादक है
(3) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है
(4) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

-: Answer :-

1-2, 2-1, 3-3, 4-1, 5-4, 6-2, 7-4

8. समुच्चय {1, 2, 3} में (1, 2) तथा (2, 1) को अन्तर्विष्ट करने वाले तुल्यता संबंधों की संख्या .... है।

9. समुच्चय {1, 2, ... n} से स्वंय तक समस्त आच्छादक फलनों की संख्या............. है।

10. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a, b) : a \le b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रमक है।

Ans. दिया है, $A = R =$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
तथा $R = \{(a, b) : a \le b^2\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, हम जानते है कि $\frac{1}{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2$ सत्य नहीं है।

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$ अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

सममित संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $-1 \le 3^2 \Rightarrow (-1, 3) \in R$
लेकिन $3 \le (-1)^2$
$\Rightarrow (3, -1) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

संक्रमक संबंध के लिए, हम जानते है कि $2 < (-3)^2 \therefore (2, -3) \in R$
तथा $(-3) \le (1)^2$
$\therefore (-3, 1) \in R$ लेकिन $2 \le 1^2 \therefore (2, 1) \notin R$ अतः R एक संक्रमक संबंध नहीं है।

11. $f(x) = 4x + 3$ द्वारा प्रदत फलन $f : R \to R$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलो फलन ज्ञात कीजिए।

Ans. फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = 4x + 3, \forall x \in R$
द्वारा परिभाषित फलन है।
मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow 4x + 3 = 4y + 3$
$\Rightarrow x = y$
$\therefore f$ एकैकी फलन है।
मान लीजिए प्रत्येक वास्तविक संख्या $y \in R$ के लिए R में, $x \in R$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$f(x) = y \Rightarrow 4x+3 = y \Rightarrow x = \frac{y-3}{4}$

$\therefore$ प्रत्यक $y \in R$ के लिए $x = \frac{y-3}{4} \in R$ इस प्रकार है कि

$f(x) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है। अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

अतः $\therefore f^{-1}$ विद्यमान है। मान लीजिए $g: R \to R$ में,

$g(x) = \frac{x-3}{4}$ द्वारा परिभाषित है।

12. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत महतम पूर्णांक फलन $f: R \to R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहां $[x], x$ से कम या उसके बराबर महतम पूर्णांक को निरूपित करता है।

Ans. फलन $f: R \to R$ में, $f(x) = [x], \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन है, जहां $[x], x$ से कम या उसके बराबर महतम पूर्णांक फलन है।

चूंकि $f(1{,}2) = [1{,}2] = 1$

$f(1{,}9) = [1{,}9] = 1$

$\therefore$ $f(1{,}2) = f(1{,}9) = 1$ लेकिन $1.2 \neq 1.2$

$\therefore$ f एकैकी फलन नहीं है।

पुनः $0.7 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 0.7$ अर्थात् $[x] = 0.7$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

अतः महतम पूर्णांक फलन न तो एकैकी है न ही आच्छादक है।

13. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित संबंधों R में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है।

(i) $R = \{(a,b) : |a-b|, 4$ का गुणज है$\}$

Ans. दिया है, $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$

$= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

(i) $R = \{(a,b) : |a-b|, 4$ का गुणज है$\}$

चूंकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $|a-a| = 0$, जो कि 4 का गुणज है। अतः R स्वतुल्य संबंध हैं अब, मान लीजिए

$(a,b) \in R \Rightarrow |a-b|, 4$ का गुणज है।

$\Rightarrow |-(b-a)|, 4$ का गुणज है।

$\Rightarrow |b-a|, 4$ का गुणज है।

$\Rightarrow (b,a) \in R, \forall a,b \in R$

अतः R सममित संबंध है। अब, मान लीजिए $(a,b),(b,c) \in R$, तब $|a-c|$ तथा $|b-c|$ 4 के गुणज है। $|a-c|$, 4 का गुणज है। $\therefore (a,c) \in R$

$\therefore R$, संक्रमक संबंध है। अतः R, एक तुल्यता संबंध है।

14. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x|$ मापांक फलन $f: R \to R$ न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

Sol. (i) एकैकी $f(x) = |x|$

$\because |-1| = 1$ तथा $|1| = 1$

परन्तु $-1 \neq 1$

f एकैकी नहीं है।

(ii) आच्छादक $f(x) = |x| =$ धनात्मक मान

अर्थात् R के ऋणात्मक मानों का पूर्व प्रतिबिम्ब R में विद्यमान नहीं है।

$\Rightarrow$ f आच्छादक नहीं है।

अतः f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

15. मान लीजिए कि A = R - {3} तथा B = R - {1} है। $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलज $f: A \to B$ पर विचार कीजिए। क्या f एकैकी तथा आच्छादक है?

Sol. एकैकी = माना $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3} = \frac{y-2}{y-3}$

$\Rightarrow (y-3)(x-2) = (x-3)(y-2)$

$\Rightarrow yx - 2y - 3x + 6 = xy - 2x - 3y + 6$

$\Rightarrow -2y - 3x = -2x - 3y$

$\Rightarrow x = y$

अतः f एकैकी है।

आच्छादक :– माना $f(x) = y$

$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3} = y$

$\Rightarrow y(x-3) = (x-2)$

$\Rightarrow xy - x = 3y - 2$

$\Rightarrow x(y-1) = 3y - 2$

$\Rightarrow \frac{3y-2}{y-1} = x$

अपरिभाषित होगा यदि $y = 1$,

$\because B = R - \{1\}$ है।

अतः फलन आच्छादक है।

अध्याय – 2
प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

अंकभार (1 + 1 + 1 + 1 = 4)

1. $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान है –

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $-\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{2\pi}{6}$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान है–

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 1

3. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान है–

(1) π (2) $-\frac{\pi}{2}$ (3) 0 (4) $2\sqrt{3}$

4. $\sin(\tan^{-1}x), |x|<1$ बराबर होता है–

(1) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5. $\sin^{-1}x = y$ तो

(1) $0 \le y \le \pi$ (2) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(3) $0 < y < \pi$ (4) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

-: Answer :-

1-1, 2-4, 3-2, 4-4, 5-2

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

6. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = $...............

Ans. $\cos^{-1}x$ का मुख्य मान = $[0, \pi]$

$$\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

7. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = $............

Ans. $\because \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$, $\sin^{-1}x$ का मुख्य मान $=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\therefore \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin^{-1}\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

8. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = $.........

Ans. $\because \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ का मुख्यमान $=[0,\pi]$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

9. यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right) = 1$ तब $x = $...........

Ans. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right) = 1$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x = \sin^{-1}1$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\left[\because \sin\frac{\pi}{2}=1\right]$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{5} \qquad \left[\because \sin^{-1}x+\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

10. सिद्ध करो $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1}x,\ x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Sol. माना $x = \sin\theta \quad \Rightarrow \theta = \sin^{-1}x$

$$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=\sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$=\sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)\quad\left[\because 1-\sin^2\theta=\cos^2\theta\right]$$

$$=\sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$=2\theta$$

$$=2\sin^{-1}x$$

11. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)=$ ....

Ans. $\sin^{-1}x$ का मुख्यमान $=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\therefore \sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)=\sin^{-1}\left(\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)\right)=\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{2\pi}{5}$$

12. $\cot\left(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a\right)=$ ....

Ans. $\cot\left(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a\right)=\cot\frac{\pi}{2}$

$$\left[\because \tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=0$$

13. $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=$ ....

Ans. $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$=\tan^{-1}(1)+\left[\pi-\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\left[\begin{array}{l}\because \sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x\\ \cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x\end{array}\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi+8\pi-2\pi}{12}=\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$$

14. $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}$ का मान .... है।

Ans. $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}=\tan^{-1}\left[\dfrac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}}\right]$

$$\left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$=\tan^{-1}\left[\dfrac{\frac{48+77}{264}}{1-\frac{14}{264}}\right]$$

$$=\tan^{-1}\left[\dfrac{\frac{125}{264}}{\frac{264-14}{264}}\right]=\tan^{-1}\dfrac{\frac{125}{264}}{\frac{250}{264}}=\tan^{-1}\left[\frac{125}{250}\right]=\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

15. x का मान ज्ञात करे :–

$$\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x,\quad (x>0)$$

Sol. $\Rightarrow\ 2\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\tan^{-1}x$

$$\Rightarrow\ \tan^{-1}\left[\dfrac{2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\right]=\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow\ \tan^{-1}\left[\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x)^2-(1-x)^2}\right]=\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow\ \frac{1-x^2}{2x}=x$$

$$\Rightarrow\ 1-x^2=2x^2$$

$$\Rightarrow\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\because x>0\ \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

16. फलन $\tan^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}\right]$, $0<x<\pi$ को सरलतम रूप में लिखिए।

हल:– $\tan^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}\right)}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\frac{x}{2}\right] = \frac{x}{2}$ उत्तर

17. सिद्ध कीजिए –

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right),\ x \in [0,1]$

हल:– R.H.S $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

माना कि $x = \tan^2\theta$ या $\tan\theta = \sqrt{x}$ या $\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$= \frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta)$

$= \frac{1}{2}\times 2\theta$

$= \theta$

$= \tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) =$ L.H.S.

18. सिद्ध कीजिए :–

$\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

हल:– L.H.S. $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ $\left\{\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right\}$

$= \frac{9}{4}\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ $\left\{\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left[\sqrt{(1-x^2)}\right]\right\}$

$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\left\{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}}\right\}$

$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\left\{\sqrt{\frac{9-1}{9}}\right\}$

$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\left\{\frac{\sqrt{8}}{3}\right\}$

$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{2}}{3}\right\} =$ R.H.S.

14. सिद्ध कीजिए :–

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$

हल:– L.H.S. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{5\times 7}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{7+5}{35}}{\frac{35-1}{35}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{8+3}{24}}{\frac{24-1}{24}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{6}{17}+\frac{11}{23}}{1-\frac{6\times 11}{17\times 23}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{138+187}{391-66}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{325}{325}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} =$ R.H.S.

अध्याय – 3
मैट्रिक्स

अंकभार (1 + 1 + 1 + 2 = 5)

1. यदि $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $B=[-1, 2, 3]$ है तो [AB] मैट्रिक्स की कोटि होगी?
(1) 1 × 1 (2) 3 × 3 (3) 3 × 2 (4) 2 × 3

2. यदि वर्ग मैट्रिक्स A एक सममित मैट्रिक्स है तो मैट्रिक्स $A+A^1$ होगी –
(1) सममित मैट्रिक्स (2) विषम सममित मैट्रिक्स
(3) सममित तथा विषम दोनों (4) इनमें से कोई नहीं

3. यदि A एक वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2=A$ तो $(2+A)^3$-7A बराबर है –
(1) A (2) I - A (3) I (4) 3A

4. यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्युह है तो AB - BA एक :–
(1) शुन्य आव्युह (2) सममित आव्युह
(3) विषम सममित आव्यूह (4) तत्समक आव्युह

5. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तथा $A+A'=I$, हो तो α का मान होगा?
(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) π (4) $\frac{3\pi}{2}$

6. आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि –
(1) AB = BA (2) AB = BA = 0
(3) AB = 0, BA = I (4) AB = BA = I

7. यदि $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2=I$ तो
(1) $1+\alpha^2+\beta\gamma=0$ (2) $1-\alpha^2+\beta\gamma=0$
(3) $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$ (4) $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

8. यदि A एक समंमित और विषमसममीत दोनों ही आव्यूह है तो :–
(1) A एक विकर्ण आव्यूह है। (2) A एक शून्य आव्यूह है।
(3) A एक वर्ग आव्यूह है। (4) इनमें से कोई नहीं

9. आव्यूहों में परिवर्त के गुणधर्म के आधार पर असत्य विकल्प का चयन कीजिए–
(1) (AB)' = B' A' (2) (A+B)' = A'+B'
(3) (KA)' = KA' (जहाँ K कोई अचर है।)
(4) (AB)' = A' B'

-: Answer :-

1-, 2-, 3-, 4-, 5-2, 6-4, 7-3, 8-2, 9-4

एक 2 × 2 आव्यूह $A=[a_{ij}]$ की रचना कीजिए

10. यदि $a_{ij}=\frac{(i+j)^2}{2}$ से प्रदत्त है।

Ans. माना 2 × 2 का आव्यूह $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

$$\because a_{ij}=\frac{(i+j)^2}{2}$$

$$a_{11}=\frac{(1+1)^2}{2}=2,\ a_{12}=\frac{(1+2)^2}{2}=\frac{9}{2}$$

इसी प्रकार $a_{21}=\frac{9}{2},\ a_{22}=8$

अतः $A=\begin{bmatrix}2 & 9/2\\ 9/2 & 8\end{bmatrix}$

11. यदि $A=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ तथा

$B=\begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\ 7 & 9 & 8\end{bmatrix}$ है तो AB ज्ञात कीजिए –

Ans. $AB=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\ 7 & 9 & 8\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}12+63 & 36+81 & 0+72\\ 4+21 & 12+27 & 0+24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}75 & 117 & 72\\ 25 & 39 & 24\end{bmatrix}$$

12. यदि $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ है तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए –

Ans. यहाँ $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2x\\3x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-y\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x-y \\ 3x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

= 2x - y = 10.................. (1)

3x + y = 5................... (2)

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर

x = 3, y = -4

13. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए $(A + A^1)$ एक सममित आव्यूह है।

Sol. हम जानते है कि $(A + A^1)$ आव्यूह सममित होती है यदि $(A + A^1) = A + A^1$

यहाँ LHS $(A + A^1)^1$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}^1\right]^1$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\right]^1$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\right]^1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

अत: $(A + A^1) = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$.................(1)

RHS $(A + A^1) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

$(A + A^1) = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$ .... (2)

समीकरण (1) व (2) से स्पष्ट है कि $A + A^1$ एक सममित आव्यूह है।

14. यदि $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2 \\ 9 \\ 2x+3 \end{bmatrix} = 0$$

$[x^2 + 2x - 45 - 2x - 3] = 0$

$[x^2 - 48] = [0]$

$x^2 - 48 = 0$

$x^2 = 48$

$x = \pm 4\sqrt{3}$

15. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में ज्ञात कीजिए।

Ans. यहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $A^1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

माना $P = \frac{1}{2}(A + A^1)$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

अत: $P = \frac{1}{2}(A + A^1)$ एक सममित आव्यूह है।

माना $Q = \frac{1}{2}(A - A^1)$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q^1 = -Q$

अत: $Q = \frac{1}{2}(A - A^1)$ एक विषम सममित आव्यूह है।

अब $P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A$$

अत: $A = P + Q$

अत: मैट्रिक्स A को सममित तथा विषम सममित के योगफल के शून्य में व्यक्त किया जा सकता है।

16. वास्तविक अवयवों वाले किसी वर्ग आव्यूह A के लिए सिद्ध कीजिए कि $A + A^1$ सममित आव्युह है तथा $A - A^1$ विषम सममित आव्युह है।

Ans. सिद्ध करना है :–

(i) $(A+A^1)$ एक सममित आव्युह है अर्थात् $(A+A^1)^1 = A+A^1$

(ii) $(A+A^1)$ एक विषम सममित आव्युह है अर्थात् $(A+A^1)^1 = -(A+A^1)$

यहाँ $(A+A^1)^1 = A^1 + (A^1)^1$

$= A^1 + A \qquad \{\because (A^1)^1 = A\}$

अतः $(A+A^1)^1 = A^1 + A$

अतः $A + A^1$ सममित है।

अब $(A - A^1)^1 = A^1 - (A^1)^1 = A^1 - A$

$(A - A^1)^1 = -(A - A^1)$

अतः $(A - A^1)$ एक विषम सममित आव्यूह है।

17. यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए $F(x).F(y) = F(x+y)$

Ans. $F(y)$ के लिए x के स्थान पर y रखे तथा इसी प्रकार $F(x+y)$ के लिए x के स्थान पर $x+y$ रखे।

बांया भाग

$$F(x).F(y) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

या $$F(x)F(y) = \begin{bmatrix} \cos x\cos y - \sin x\sin y & -\cos x\sin y - \sin x\cos y & 0 \\ \sin x\cos y + \cos x\sin y & -\sin x\sin y + \cos x\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \therefore \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \\ \therefore \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \end{bmatrix}$$

या $$F(x).F(y) = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

या $F(x).F(y) = F(x+y)$

18. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = k.A - 2I$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

या $A^2 = \begin{bmatrix} 9-8 & -6+4 \\ 12-8 & -8+4 \end{bmatrix}$

या $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \qquad \therefore A^2 = k.A - 2I$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix}$

समान आव्यूह के गुणधर्म द्वारा समान आव्यूह के संगत अवयवों को समान रखने पर

$3k - 2 = 1 \Rightarrow k = 1$

$-2k = -2 \Rightarrow k = 1 \qquad$ अतः $k = 1$

$4k = 4 \Rightarrow k = 1$

$-4 = -2k - 2 \Rightarrow k = 1$

19. यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो $(A+2B)'$ ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया गया है– $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

अतः $B' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore (A+2B)' = A' + (2B)'$

$\Rightarrow (A+2B)' = A' + 2B'$

$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -2-2 & 3+2 \\ 1+0 & 2+4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

अध्याय – 4
सारणिक

अंकभार (1 + 1 + 1 + 2 = 5)

1. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान होगा?

(1) 0 (2) 1

(3) –1 (4) 3

2. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है–

(1) 6 (2) –6

(3) ± 6 (4) 0

3. तीन संरेख बिन्दुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा –

(1) 0 (2) 1

(3) –1 (4) ± 1

4. यदि n कोटि का एक वर्ग आव्यूह A हो तो |adj(A)| होगा–

(1) |A| (2) $|A|^n$

(3) $|A|^{n+1}$ (4) $|A|^{n-1}$

5. यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो del (A^{-1}) होगा–

(1) del(A) (2) $\frac{1}{del(A)}$

(3) 1 (4) 0

-: Answer:-

1-2, 2-3, 3-1, 4-4, 5-2

6. यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया है कि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

या $3 - x^2 = 3 - 8$

या $x^2 = 8$

अतः $x = \pm 2\sqrt{2}$

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$

Ans. दिया गया है $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = 2 - 8 = -6$

$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$|2A| = 2 \times 4 - 8 \times 4 = 8 - 32 = -24$

अतः $|2A| = -24 = 4(-6) = 4|A|$

अतः $|2A| = 4|A|$

8. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (3, 8), (-4, 2) एवं (5, 1) है।

Ans. त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)]$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(3 + 72 - 14)$$

$$\Delta = \frac{61}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

9. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

Ans. हम जानते है कि $A_{11} = 4, A_{12} = -1$

$A_{21} = -3, A_{22} = 2$

अतः $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

10. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक व सहखंड ज्ञात कीजिए।

Ans. अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

यहां $a_{11}=1$, इसलिए $M_{11}=a_{11}$ का उपसारिणक $=3$

$M_{12}=$ अवयव a_{12} का उपसारिणक $=4$

$M_{21}=$ अवयव a_{21} का उपसारिणक $=-2$

$M_{22}=$ अवयव a_{22} का उपसारिणक $=1$

अब a_{ij} का सहखंड A_{ij} है। इसलिए

$A_{11}=(-1)^{1+1|}M_{11}=(-1)^2(3)=3$

$A_{12}=(-1)^{1+2|}M_{12}=(-1)^3(-4)=4$

$A_{21}=(-1)^{2+1|}M_{21}=(-1)^3(-2)=2$

$A_{22}=(-1)^{2+2|}M_{22}=(-1)^4(1)=1$

11. सारणिकों का प्रयोग करके A(1,3) और B(0, 0) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए और k का मान ज्ञात d hft , A ; fn , d fcUnq D(k, 0) इस प्रकार है कि ΔABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

Ans. मान लीजिए, AB पर कोई बिन्दु P(x, y) है तब

ΔABP का क्षेत्रफल $=0$

इसलिए $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}=0$

इससे प्राप्त है $\frac{1}{2}(y-3x)=0$

या $y=3x$

जो अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

किन्तु ΔABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई दिया है अतः

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ k & 0 & 1\end{vmatrix}=\pm 3$$

हमें प्राप्त है $\frac{-3k}{2}=\pm 3$

अतः $k=\pm 2$

12. प्रदर्शित कीजिए कि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ समीकरण $A^2-4A+I=0$, जहां $I, 2\times 2$ कोटि का एक तत्समक आव्यूह है और $0, 2\times 2$ कोटि का एक शून्य आव्यूह हैं इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

Ans. हम जानते है कि

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}$$

अ त :

$$A^2-4A+I=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 12\\ 4 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

अब $A^2-4A+I=0$

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$

$\Rightarrow A^2-4A+I=0$ को A^{-1} से गुणा करने पर

$\Rightarrow A^{-1}.(A^2-4A+I)=A^{-1}.0$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)A-4A^{-1}A+A^{-1}=0$

$\Rightarrow A-4I+A^{-1}=0$

$\Rightarrow A^{-1}=4I-A$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

अतः $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

13. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ है।

Ans. हम जानते है कि $AB=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}67 & 87\\ 47 & 61\end{bmatrix}$

क्योंकि $|AB|=\begin{vmatrix}67 & 87\\ 47 & 61\end{vmatrix}=4087-4089=-2\neq 0$

$(AB)^{-1}$ का अस्तित्व है और इसे निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{AB}.adj(AB)=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}61 & -87\\ -47 & 67\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{61}{2} & \frac{87}{2}\\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2}\end{bmatrix}$$

और $|A|=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{vmatrix}=15-14=1\neq 0$

और $|B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 54 - 56 = -2 \neq 0$

इसलिए A^{-1} एवं B^{-1} दोनों का अस्तित्व है और निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$A^{-1} = \frac{1}{(A)} adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

एवं $B^{-1} = \frac{1}{|B|} adj(B) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$

अतः $B^{-1}.A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$$

अतः $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

14. सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (13, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः— माना बिन्दु $A(1, 2)$ एवं $B(3, 6)$ को मिलाने वाली रेखा पर बिन्दु $P(x, y)$ है।

अतः बिन्दु A, P एंव B एक रेखा पर है या संरेख है अतः इन तीनों बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल का मान शून्य होगा।

अतः— $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(2-6) - y(1-3) + 1(6-6) = 0$$

$$\Rightarrow -4x + 2y + 0 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{-2x + y = 0}$ या $\boxed{y = 2x}$

15. निम्न समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल किजिए—

$$5x + 2y = 3$$
$$3x + 2y = 5$$

हलः— दिए गए समीकरण विकल्प को निम्न रूप में लिख सकते है।

$Ax = B$ जहाँ $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4 \neq 0$

A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

A^{-1} विद्यमान है।

अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है तथा इसका अद्वितीय हल निम्न है। $X = A^{-1}B$

A के सहखण्ड निम्न है

$A_{11} = 2,\ A_{12} = -3,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = 5$

$$ad_j(A) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{(A)} ad_j(A) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

अबः— $X = A^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix}$

$$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

अतः— $\boxed{x = -1,\ y = 4}$

16. आव्युह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्या ज्ञात कीजिए ताकि $A^2 + aA + bI = 0$ हो —

Ans. यहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\because A^2 + aA + bI = 0$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a \\ 4+a & 3+a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 11 + 3a + b = 0$

$= 3a + b = -1$

$= 8 + 2a = 0$

$= 2a = -8$

$\boxed{a = -4}$

$= 3x - 4 + b = -11$

$= -12 + b = -11$

$\boxed{b = 1}$

17. समीकरण निकाय

$3x - 2y + 3z = 8$

$2x + y - z = 1$

$4x - 3y + 2z = 4$

को आव्युह विधि से हल कीजिए।

Sol. समीकरण निकाय को $AX = B$ पर बदलने पर

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

यहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

अब $A^{-1} = \dfrac{adj\,(A)}{|A|}$

$|A| = -17$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

अब $X = -\dfrac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x = 1,\ y = 2,\ z = 3}$

अध्याय – 5
सांतत्य और अवकलनीयता

अंकभार (1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8)

1. फलन $f(x)=[x]$ असंतत है–
(1) प्रत्येक वास्तविक संख्या पर (2) प्रत्येक परिमेय संख्या पर
(3) प्रत्येक पूर्णांक पर (4) प्रत्येक अपरिमेय संख्या पर

2. निम्न में से कौनसा फलन अवकलनीय है ($x = 0$ पर)
(1) $F(x) = [x]$ (2) $F(x) = |x|$
(3) $F(x) = x^2$ (4) $F(x) = \frac{1}{x}$

3. $y=\log_a x$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा–
(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{ax}$
(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{\log_a e}{x}$ (4) $\frac{dy}{dx}=\frac{\log_e x}{x}$

4. फलन $\cos^{-1}(e^{-x})$ का अवकलन होगा–
(1) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}$ (2) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}$
(3) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (4) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

5. $x^3\log x$ का x के सापेक्ष द्वितीय कोटि का अवकलज है–
(1) $x(5+6\log x)$ (2) $x^2(5+6\log x)$
(3) $x(6+5\log x)$ (4) $x^2(6+5\log x)$

6. फलन $3y=\sin x-2x$ का x के सापेक्ष अवकलन है–
(1) $\frac{\cos x+2}{3}$ (2) $\frac{2-\cos x}{3}$
(3) $\frac{\cos x-2}{3}$ (4) $\frac{\cos x-2}{-3}$

7. $y=\sin(\log x)$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ होगा –
(1) $-\frac{\cos(\log x)}{x}$ (2) $\frac{\cos(\log x)}{x}$
(3) $\cos(\log x)$ (4) $-\cos(\log x)$

-: Answer :-

1-3, 2-3, 3-3, 4-3, 5-1, 6-3, 7-2

8. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right]=$ .... है।

Ans. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}\times e^{\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$

9. $\frac{d}{da}(a^x)=$ .... है।

Ans. $\frac{d}{da}(a^x)=xa^{x-1}$

10. यदि $y=\tan^{-1}x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}=$ .... है।

Ans. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2},\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(1+x^2)^2}\times 2x=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

11. फलन $f(x)=|(x-3|,x\in R,x$ के मान .... पर अवकलनीय नहीं है।

Ans. $x=3$ पर $f(x)=|(x-3)|$ अवकलनीय फलन नहीं होता है।

12. $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

हलः– $x=a\cos\theta$ समीकरण (1)
$y=a\sin\theta$ समीकरण (2)
समीकरण (1) व (2) का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर –

$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$ तथा $\frac{dx}{d\theta}=-a\cos\theta$

अतः– $\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=-\cot\theta}$

13. $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & if\ x\neq 0\\ 0, & if\ x=0\end{cases}$

Ans. यहां, $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & if\ x\neq 0\\ 0, & if\ x=0\end{cases}$

अब, $LHL = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$

$x = 0-h$ रखने पर, $x\to 0^- \Rightarrow h\to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{|0-h|}{0-h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{-h} = -1$

तथा $RHL = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$

$x = 0+h$ रखने पर

$x\to 0^+ \Rightarrow h\to 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{|0+h|}{0+h} = \lim_{x\to 0}\frac{h}{h} = 1$

$\therefore \quad LHL \neq RHL$

अतः $f(x), x=0$ पर असतत फलन है।

14. f के सतत्ता की जांच कीजिए, जहां f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & if\ x \neq 0 \\ -1, & if\ x = 0 \end{cases}$$

Ans. यहां, $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & if\ x \neq 0 \\ -1, & if\ x = 0 \end{cases}$

अब,

$LHL = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(\sin x - \cos x)$

$x = 0-h$ रखने पर, $x\to 0^- \Rightarrow h\to 0$

$\lim_{h\to 0}[\sin(0-h) - \cos(0-h)] = \lim_{h\to 0}(-\sin h - \cos h) = 0-1 = -1$

तथा

$RHL = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\sin x - \cos x)$

$x = 0+h$ रखने पर, $x\to 0^+ \Rightarrow h\to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}[\sin(0+h) - \cos(0+h)] = \lim_{h\to 0}(\sin h - \cos h) = 0-1 = -1$

$\therefore \ LHL = RHL = f(0)$

अतः $f(x), x=0$ पर सतत फलन है।

हम जानते हैं कि $x<0$ के लिए $f(x) = \sin x - \cos x$ सतत फलन है तथा $x>0$ के लिए $f(x) = \sin x - \cos x$ सतत् फलन है। अतः $f(x), x$ के प्रत्येक मान के लिए सतत है।

निम्नलिखित प्रश्नों में k के मानों को ज्ञात कीजिए, ताकि प्रदत फलन निर्दिष्ट बिन्दु पर सतत हो। (प्र.सं. 12–13)

15. $y = x^3 + \tan x$ हो तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करो।

Ans. $y = x^3 + \tan x$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2\sec^2 x \tan x$

16. $f(x) = \begin{cases} kx+1, & यदि\ x \le 5 \\ 3x-5, & यदि\ x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x=5$ पर

Ans. यहां, $f(x) = \begin{cases} kx+1, & यदि\ x \le 5 \\ 3x-5, & यदि\ x > 5 \end{cases}$

अब, $LHL = \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-}(kx+1)$

$x = 5-h$ रखने पर, $x\to 5^- \Rightarrow h\to 0$

$\Rightarrow$

$\lim_{h\to 0}[k(5-h)+1] = \lim_{h\to 0}[5k - kh + 1] = 5k+1$

तथा

$RHL = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}(3x-5)$

$x = 5+h$ रखने पर, $x\to 5^+ \Rightarrow h-0$

$\Rightarrow$

$\lim_{h\to 0}[3(5+h)-5] = \lim_{h\to 0}(10+3h) = 10$

पुनः, $f(5) = 5k+1$

$[\because f(x) = kx+1]$

$\because f(x)x=5$ पर सतत् फलन है।

$\therefore \ LHL = RHL = f(5)$

$LHL = RHL = f(5) \Rightarrow 5k+1 = 10 \Rightarrow k = \frac{9}{5}$

17. दर्शाइए कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक सतत् फलन है।

Ans. मान लीजिए $g(x) = \cos x$ तथा $h(x) = |x|$

हम जानते है कि प्रत्येक $x\in R$ के लिए $g(x) = \cos x$ सतत् फलन है।

पुनः प्रत्येक $x\in R$ के लिए मापांक फलन $h(x) = |x|$ सतत् फलन होता हैं अतः संयोजक फलन,

प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $(hog)(x) = h(g(x)) = h(\cos x) = |\cos x|$ सतत फलन होगा।

अतः $f(x) = |\cos x|$, प्रत्येक $x\in R$ के लिए सतत् फलन है।

18. $y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$

(i) $\frac{dy}{dx}=?$

Ans. $\tan^{-1}x=\theta$ अर्थात् $x=\tan\theta$ रखने पर,

$\therefore \quad y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$\left(\because \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta\right)$

$\Rightarrow \quad y=\cos^{-1}(\cos 2\theta)=2\theta=2\tan^{-1}x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{2}{1+x^2}$

$\left(\because \frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}\right)$

(ii) $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$

Ans. $x=\tan\theta \Rightarrow \tan^{-1}x=\theta$ रखने पर,

$\therefore y=\sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=\sin^{-1}(\cos 2\theta)$

$\Rightarrow y=\sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]$

$\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\theta \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$

$\frac{dy}{dx}=0-\frac{2}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2}{1+x^2}$

$\left[\because \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}\right]$

19. $y=\sin(\tan^{-1}e^{-x})$

$\frac{dy}{dx}=?$

Ans. मान लीजिए $y=\sin(\tan^{-1}e^{-x})$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\tan^{-1}(e^{-x})\right)\right]$

$=\cos\left(\tan^{-1}(e^{-x})\right)\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}(e^{-x})\right)$

(श्रृंखला नियम से)

$=\cos\left(\tan^{-1}(e^{-x})\right)\frac{1}{1+(e^{-x})^2}\frac{d}{dx}(e^{-x})$

$=\cos\left(\tan^{-1}(e^{-x})\right)\frac{1}{1+e^{-2x}}=-\frac{e^{-x}\cos(\tan^{-1}e^{-x})}{1+e^{-2x}}$

20. $y=\log(\cos e^x)$

$\frac{dy}{dx}=?$

Ans. मान लीजिए $y=\log(\cos e^x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\log(\cos(e^x))\right]=\frac{1}{\cos(e^x)}\frac{d}{dx}(\cos(e^x))$

(श्रृंखला नियम से)

$=\frac{1}{\cos(e^x)}\{-\sin(e^x)\}\frac{d}{dx}(e^x)$

$=-\tan(e^x)e^x=-e^x\tan(e^x)$

21. $y=\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)-1<x<1$

$\frac{dy}{dx}=?$

Ans. $x=\tan\theta \Rightarrow \tan^{-1}x$ रखने पर,

$y=\cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$\Rightarrow y=\cos^{-1}(\sin 2\theta)$

$\left(\because \sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$$\Rightarrow y=\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]$$

$$\left[\because \sin 2\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]$$

$$\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\theta \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x$$

$$\left(\because \theta=\tan^{-1}x\right)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx}=0-\frac{2}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2}{1+x^2}$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}\right]$$

22. $y^x=x^y$ $\qquad \frac{dy}{dx}=?$

Ans. दिया है, $y^x=x^y$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y^x=\log y^x \Rightarrow x\log y=y\log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(x\log y)=\frac{d}{dx}(y\log x)$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}+(\log y)=y\frac{1}{x}+(\log x)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}-(\log x)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\log y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y}-\log x\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\log y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-y\log x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y-x\log y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\frac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$$

23. $x=\alpha\cos\theta, y=b\cos\theta$ $\qquad \frac{dy}{dx}=?$

Ans. दिया है, $x=a\cos\theta$ तथा $y=b\cos\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{d\theta}=a(-\sin\theta) \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta}=b(-\sin\theta)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{dy}{d\theta}\times\frac{d\theta}{}=\frac{-b\sin\theta}{-a\sin\theta}=\frac{b}{a}$$

$$\left(\because \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

24. $x=\sin t, y=\cos 2t$

$$\frac{dy}{dx}=?$$

Ans. $x=\sin t$ तथा $y=\cos 2t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\cos t \text{ तथा } \frac{dy}{dt}=-(\sin 2t)2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}$$

$$\left(\because \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

$$=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=\frac{-2(2\sin t\cos t)}{\cos t}=-4\sin t$$

$$(\because \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta)$$

25. $y=\log(\log x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=?$$

Ans. मान लीजिए $y=\log(\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x\log x}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\log x}\right)=\frac{d}{dx}(x\log x)^{-1}$$

$=-1(x\log x)^{-2}\frac{d}{dx}(x\log x)$

$=-\frac{1}{(x\log x)^2}\left[x\frac{d}{dx}\log x+\log x\frac{d}{dx}(x)\right]$

$=-\frac{1}{(x\log x)^2}\left(x.\frac{1}{x}+\log x.1\right)=\frac{-(1+\log x)}{(x\log x)^2}$

26. यदि $y=5\cos x-3\sin x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

Ans. दिया है, $y=5\cos x-3\sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=-5\sin x-3\cos x$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-5\sin x-3\cos x)$

$=-5\cos x+3\sin x$

$=-(5\cos x-3\sin x)$

$=-y$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}+y=0$

27. $y=(\log x)^{\log x}$ के दोनों तरफ का लघुगणक लेकर अवकलन कीजिए।

Ans. मान लीजिए $y=(\log x)^{\log x}$

दोनो तरफ का लघुगणक लेने पर,

$\log y=\log\left[(\log x)^{\log x}\right]$

$\Rightarrow \log y=\log x\log(\log x)$

$(\because \log m^n=n\log m)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\left\{(\log x)\frac{d}{dx}\log(\log x)\right\}+\log\log(x)\frac{d}{dx}\log(x)$

$=(\log x)\frac{1}{\log x}\frac{1}{x}+\log(\log x)\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\{1+\log(\log x)\}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\{1+\log(\log x)\}$

$=\frac{(\log x)^{\log x}}{x}(1+\log(\log x))$

$=(\log x)^{\log x}\left[\frac{1}{x}+\frac{\log(\log x)}{x}\right]$

28. a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $f(x)=\begin{cases}ax+1, & \text{यदि } x\le 3\\ bx+3, & \text{यदि } x>0\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x=3$ पर संतत है।

Ans. दिया है: फलन $x=3$ पर संतत हैं। इसलिए बाएं पक्ष की सीमा $=$ दाएं पक्ष की सीमा $=f(3)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} ax+1=\lim_{x\to 3^+} bx+3=3a+1$

$\Rightarrow 3a+1=3b+3=3a+1$

$\Rightarrow 3a=3b+2\Rightarrow a=b+\frac{2}{3}$

29. यदि $x=a(\theta-\sin\theta)$ $y=a(1+\cos\theta)$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

हलः– $x=a(\theta-\sin\theta)$ $y=a(1+\cos\theta)$ दोनों समीकरणों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$\frac{dx}{d\theta}=a[1-\cos\theta]$ ——— समीकरण (1)

$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$ ———— समीकरण (2)

अब $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-a\sin\theta}{a[1-\cos\theta]}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{a\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\cot\frac{\theta}{2}}$ उत्तर

30. यदि $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

Ans. दिया है, $x = a\left(\cot + \log \text{tna}\frac{t}{2}\right)$ तथा $y = a\sin t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = a\left\{-\sin t + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\cdot\sec^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}\right\}$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}\right]$$

$$= a\left\{-\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right\}$$

$$= a\left\{-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right\}$$

$$= a\left\{\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\right\}$$

$$\left(\because \sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}$$

$(\because 1-\sin^2 t = \cos^2 t)$ .... (i)

पुन: $y = a\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a\cos t$ .... (ii)

समी. (i) तथा (ii) से

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{\frac{a\cos^2 t}{\sin t}} = \tan t$$

31. यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ मान होगा।

Sol. $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$ .... (i)

$y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$ .... (ii)

समी. (i) तथा (ii) की गुणा करने पर,

$$xy = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}} \times \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$$

$$xy = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}\cdot a^{\cos^{-1}t}}$$

$$xy = \sqrt{a^{\sin^{-1}t+\cos^{-1}t}}$$

$$\left(\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$xy = \sqrt{a^{\frac{\pi}{2}}}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

32. यदि $\sin^{-1}(x\sqrt{x})$, $0 \le x \le 1$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा?

Sol. $y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{x}\right)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\sqrt{x}\right), \quad 0 \le x \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(x^{3/2})}{\sqrt{1-(x\sqrt{x})^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}$$

अध्याय – 6
अवकलज के अनुप्रयोग

अंकभार (1 + 1 + 2 + 2 = 6)

1. एक 10 m त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 m^3/h की दर से गेंहू भरा जाता हैं भरे गए गेहूं की गहराई की वृद्धि दर है–

(1) 1 m/h (2) 0.1 m/h

(3) 1.1 m/s (4) 0.5 m/h

2. निम्न में से $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है–

(1) -sin x (2) cos 2 x

(3) cos 3 x (4) tan x

3. एक वृत की त्रिज्या $r = 6$ cm पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है–

(1) 10π (2) 12π

(3) 8π (4) 11π

4. यदि कोई फलन अन्तर्गत I में निरन्तर वर्धमान होगा यदि $x_1, x_2 \in I$ तथा $x_1 < x_2$ तब–

(1) $f(x_1) \le f(x_2)$ (2) $f(x_1) \ge f(x_2)$

(3) $f(x_1) < f(x_2)$ (4) $f(x_1) > f(x_2)$

5. निम्नलिखित में कौन से फलन $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है?

(1) cos x (2) sin x

(3) cos 3x (4) tan x

6. निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x) = x^{400} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत फलन f ह्रासमान है?

(1) $(0,1)$ (2) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

(3) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (4) इनमें से कोई नहीं

-: Answer :-

1-1, 2-2, 3-2, 4-3, 5-1, 6-4

7. फलन $f(x) = x^3 - 3x + 7$ के लिए क्रातिक बिन्दु..........है।

Ans. $x = \pm 1$

8. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर फलन e^x हमेशा...... होगा।

Ans. निरन्तर वर्धमान

9. किसी आयत की लम्बाई $x, \frac{3\text{cm}}{\min}$ की दर से घट रही है तथा चौड़ाई $y, 2\frac{\text{cm}}{\min}$ की दर से बढ़ रही है तब इसके परिधि में परिवर्तन... ....है।

Ans. -2 cm / min

10. यदि $f(x) = -|x+1|+3$ तो $f(x)$ का अधिकतम मान .... है।

Ans. दिया गया फलन $g(x) = -|x+1|+3$

हम जानते है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $|x+1| \ge 0$

$\Rightarrow$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $-|x+1| \le 0$

$\Rightarrow$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $-|x+1|+3 \le 3$

g का उच्चतम मान तभी ज्ञात किया जा सकता

जब $|x+1| = 0$ या $x = -1$

अर्थात $|x+1| = 0 \Rightarrow x = -1$

$\therefore$ g का उच्चतम मान $= g(-1) = |-1+1|+3 = 3$

11. एक वृत की त्रिज्या 0.7 सेमी/सेकण्ड की दर से वृद्धि हो रही है, तब वृत की परिधि में परिवर्तन की दर .... होगी।

Ans. मान लीजिए समय (t) पर वृत की त्रिज्या r है और इसकी परिधि c है।

तब $c = 2\pi r$

परिधि की वृद्धि की दर, $\frac{dc}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}$ (t के सापेक्ष अवकलन करने पर, श्रृंखला नियम द्वारा)

जहां, $\frac{dr}{dt}$ त्रिज्या की वृद्धि की दर है।

$\therefore \frac{dr}{dt} = 0.7$ सेमी/से

$\frac{dc}{dt} = 2\pi(0.7)$ सेमी/से $= 14\pi$ सेमी/से $\left(\because \frac{dr}{dt} = 0.7\right.$ सेमी/से, दिया है)

https://t.me/ShekhawatiMission100

$\therefore$ अतः परिधि की वृद्धि की दर 14π सेमी/से है।

12. सिद्ध कीजिए $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R$ पर निरन्तर वर्धमान फलन है?

हल : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$

$f^1(x) = 3x^3 - 6x + 4$

$f^1(x) = 3(x^2 - 2x + 1)$

$f^1(x) = 3(x-1)^2 + 1$

प्रत्येक $x \in R$ पर $(x-1)^2 \geq 0$

$3(x-1)^2 \geq 0$

$3(x-1)^2 + 1 > 0$

अतः f हमेशा निरन्तर वर्धमान फलन होगा।

13. अंतराल $[1,5]$ में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ द्वारा प्रदत फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

Ans. हमें ज्ञात है

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

या $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-3)(x-2)$

ध्यान दीजिए $f'(x) = 0$ से $x = 2$ और $x = 3$ प्राप्त होते हैं। अब हम इन बिन्दुओं और अंतराल $[1,5]$ के अंत्य बिन्दुओं अर्थात $x = 1, x = 2, x = 3$ और $x = 5$ पर f के मान का परिकलन करेंगे। अब

$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$

$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$

$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$

$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$

इस प्रकार, हम निष्कर्ष पर पहुंचते है कि अंतराल $[1,5]$ पर फलन f के लिए $x = 5$ पर निरपेक्ष उच्चतम मान 56 और $x = 1$ पर निरपेक्ष निम्नतम मान 24 है।

14. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा प्रदत फलन f वर्धमान या ह्रासमान है।

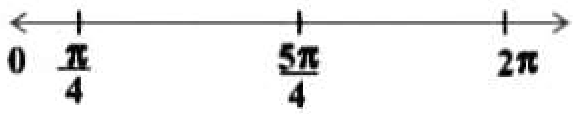
Ans. ज्ञात है कि

$f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$

या $f'(x) = \cos x - \sin x$

अब $f'(x) = 0$ से $\sin x = \cos x$ जिससे हमें $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ प्राप्त होते हैं। क्योंकि $0 \leq x \leq 2\pi$

बिन्दु $x = \frac{\pi}{4}$ और $x = \frac{5\pi}{4}$ अंतराल $[0, 2\pi]$ को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामतः $\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ में विभक्त करते हैं।



ध्यान दीजिए कि $f'(x) > 0$ यदि $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

अतः अंतरालों $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ में फलन f वर्धमान है।

और $f'(x) < 0$, यदि $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

अतः f अंतराल $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ में ह्रासमान है।

15. दिखाइए कि प्रदत फलन f,

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R$

R परवर्धमान फलन है।

Ans. ध्यान दीजिए कि

$f(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 1$

$= 3(x-1)^2 + 1 > 0$, सभी $x \in R$ के लिए

इसलिए फलन f, R पर वर्धमान है।

16. सिद्ध कीजिए कि प्रदत फलन $f(x) = \cos x$

$(a)(0, \pi)$ में ह्रासमान है

$(b)(\pi, 2\pi)$ में वर्धमान है

$(c)(0, 2\pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

Ans. ध्यान दीजिए कि $f'(x) = -\sin x$

(a) चूंकि प्रत्येक $x \in (0, \pi)$ के लिए $\sin x > 0$, हम पाते हैं कि $f'(x) < 0$ और इसलिए $(0, \pi)$ में f ह्रासमान है।

(b) चूंकि प्रत्येक $x \in (\pi, 2\pi)$ के लिए $\sin x < 0$, हम पाते है कि $f'(x) > 0$ और इसलिए $(\pi, 2\pi)$ में f वर्धमान है।

(c) उपरोक्त (a) और (b) से स्पष्ट है कि $(0, 2\pi)$ में f न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

17. वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ द्वारा प्रदत फलन f (a) वर्धमान (b) ह्रासमान हैं।

Ans. यहां

$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$

या $f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$

$= 12(x^2 - x - 6)$

$= 12(x-3)(x+2)$

इसलिए $f'(x) = 0$ से $x = -2, 3$ प्राप्त होते हैं। $x = -2$ और $x = 3$ वास्तविक रेखा को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामतः $(-\infty, 2), (-2, 3)$ और $(3, \infty)$ में विभक्त करता है (चित्रानुसार)

अंतरालों $(-\infty, -2)$ और $(3, \infty)$ में $f'(x)$ धनात्मक है जबकि अंतराल $(-2, 3)$ में $f'(x)$ ऋणात्मक है। फलस्वरूप फलन f अंतरालों $(-\infty, -2)$ और $(3, \infty)$ में वर्धमान है जबकि अंतराल $(-2, 3)$ में फलन ह्रासमान हैं तथापि f, R पर न तो वर्धमान है ओर न ही ह्रासमान है।

18. ऐसी दो संख्याएं ज्ञात कीजिए, जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम हो।

Ans. सब से पहले हम दो संख्या x और $(24 - x)$ मानते है फिर हम $y = x(24 - x)$ मानते हैं अब अवकलन का अनुप्रयोग करके दोनों संख्या ज्ञात करते है।

मान लीजिए पहली संख्या x है, तब दूसरी संख्या $(24 - x)$ है।

($\because$ दो संख्याओं का योग 24 है)

यदि y के सापेक्ष का गुणनफल को दर्शाता है तो

$y = x(24 - x) = 24x - x^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = 24 - 2x$ और $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$

अब $\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर

$\Rightarrow 24 - 2x = 0$

$\therefore x = 12$

$x = 12$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0$

इसलिए संख्याओं का गुणनफल उच्चतम होगा जब संख्या $x = 12$ होगी और $24 - 12 = 12$ इसलिए संख्याए 12 और 12 है।

19. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log|\cos x|\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर ह्रासमान और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरन्तर वर्धमान है।

Ans. दिया है, $f(x) = \log(\cos x)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$ (x के सापेक्ष अवलन करने पर)

अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $\tan x > 0$

($\because \tan x$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\Rightarrow -\tan x < 0$ ($\because \tan x$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $f'(x) < 0$

अतः $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में f निरन्तर ह्रासमान है।

अब अंतराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में $\tan x < 0$

$\Rightarrow -\tan x > 0$

($\because \tan x$ द्वितीय चतुर्थांश में है)

$\therefore \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में $f'(x) > 0$

इसलिए, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में f निरन्तर वर्धमान है।

20. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\log\sin x, \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर वर्धमान और $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में निरन्तर ह्रासमान है।

Ans. दिया है, $f(x)=\log(\sin x)$

$$f'(x)=\frac{1}{\sin x}(\cos x)=\cot x$$

(x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

अंतराल $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में, $f(x)=\cot x>0$

क्योंकि $\cot x$ प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक होता है।

$\therefore \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में f निरन्तर वर्धमान है।

अंतराल $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में, $f'(x)=\cot x<0$

क्योंकि $\cot x$ द्वितीय चतुर्थांश में ऋणात्मक है।

$\therefore \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ पर f निरन्तर ह्रासमान है।

21. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन f निरंतर वर्धमान या ह्रासमान है।

(i) $f(x)=x^2+2x+5$ (ii) $f(x)=10-6x-2x^2$

Ans.

$x=-1$ वास्तविक रेखा को दो अंतराल $(-\infty,-1)$ और $(-1,\infty)$ में विभाजित करती है

अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty,-1)$	$-$ve	निरंतर ह्रासमान
$(-1,\infty)$	$+$ve	निरंतर वर्धमान

अतः जब $x>-1$ तो $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और जब $x<-1$, तो $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है

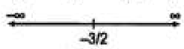
(ii) मान लीजिए $f(x)=10-6x-2x^2$

$\Rightarrow$ $f'(x)=0-6-2\cdot2x=-6-4x$

$f'(x)=0$ रखने पर,

$$-6-4x=0, \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$$

जो वास्तविक रेखा को दो अंतराल $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ और $\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$ में विभाजित करता है।



अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$	$-$ve	निरंतर वर्धमान
$\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$	$-$ve	निरंतर ह्रासमान

इसलिए, $x<-\frac{3}{2}$ के लिए f निरंतर वर्धमान है और $x>-\frac{3}{2}$ के लिए f निरंतर ह्रासमान है

(i) मान लीजिए कि $f(x)=x^2+2x+5$

$\therefore f'(x)=2x+2=0$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$f'(x)=0$ रखने पर,

$\Rightarrow 2x=-2, x=-1$

22. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 सेमी है।

Ans. मान लीजिए कि गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या r और आयतन V है।

तब, $r=10$ सेमी और $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

त्रिज्या r के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर

$$\frac{dV}{dr}=\left(\frac{4}{3}\pi\right)3r^2$$ (r के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$=4\pi r^2=4\pi(10)^2=400\pi$

($\because r=10$ सेमी)

अतः गुब्बारे का आयतन 400π सेमी/सेमी की दर से बढ़ रहा है।

23. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंधित कुल लागत $c(x)$ (रुपये में) $c(x)=0.007x^3-0.003x^2+15x+4000$ से प्रदत है।

सीमांत लागत ज्ञात कीजिए, जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है।

सीमांत लागत परिणाम के सापेक्ष कुल लागत के परिवर्तन की दर है।

Ans. सीमांत लागत $=\frac{dc}{dt}$

$$\frac{dc}{dt}=0.007(3x^2)-0.003(2x)+15=0.021x^2-0.006x+15$$

जब $x=17$, सीमांत लागत $=0.021(17)^2-0.006(17)+15$

$=0.021(289)-0.006(17)^2+16$

$=6.069+0.102+15$

$=$ 20.967

अतः जब 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है, तो सीमांत लागत 20.967 रुपये है।

24. सिद्ध कीजिए $f(x)=\sin x$ से प्रदत फलन

(i) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है।

(ii) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान

(iii) $(0, \pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

Ans. दिया गया फलन $f(x) = \sin x$ है।

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = \cos x$$

(i) अतः प्रत्येक $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए $\cos x > 0$

($\therefore \cos x$ प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक है)

$$f'(x) > 0$$

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है।

(ii) अतः, प्रत्येक $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ के लिए $\cos x < 0$

($\therefore \cos x$ द्वितीय चतुर्थांश में धनात्मक है)

$$f'(x) < 0$$

इसलिए, $f, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(iii) जब $x \in (0, \pi)$ हम देखते है कि $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x) > 0$

और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में $f'(x) < 0$

इसलिए $f'(x), (0, \pi)$ में धनात्मक और ऋणात्मक है।

इसलिए $(0, \pi)$ में $f(x)$ न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

25. एक आयत की लम्बाई x,5 सेमी/मिनट की दर से घट रहा है और चौड़ाई y,4 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है। जब $x = 8$ सेमी और $y = 6$ सेमी है, तब आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

Ans. मान लीजिए कि किसी समय t पर, आयत की लम्बाई, चौड़ाई, परिमाप और क्षेत्रफल क्रमशः x, y, P और A है, तब $P = 2(x + y)$ और $A = xy$ ....
..1

आयत का परिमाप = 2(लम्बाई + चौड़ाई) और क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

यह दिया है कि $\frac{dx}{dt} = -5$ सेमी/मिनट

($-ve$ चिन्ह दर्शाता है कि लम्बाई घट रही है)

और $\frac{dy}{dt} = 4$ सेमी/मिनट

(a) अब, $P = 2(x + y)$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

परिमाप के परिवर्तन की दर $\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$

$= 2(-5 + 4)$ सेमी/मिनट $= -2$ सेमी/मिनट

$\left(\therefore \frac{dx}{dt} = -5 \,\&\, \frac{dy}{dt} = 4\right)$

अतः, आयत का परिमाप 2 सेमी/मिनट की दर से घट ($-ve$ चिन्ह) रहा है।

(b) यहां, आयत का क्षेत्रफल $A = xy$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर $\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dA}{dt} = 8 \times 4 + 6 \times (-5)$$

$$\left(\therefore \frac{dx}{dt} = -5 \,\&\, \frac{dy}{dt} = 4\right)$$

$$-32 - 30 = 2 \text{ सेमी}^2/\text{मिनट}$$

अतः, आयत का क्षेत्रफल 2 सेमी^{2}/मिनट की दर से बढ़ रही है।

नोट– यदि परिवर्तन की दर बढ़ रही है, तो हम ($+ve$ चिन्ह) लेते है और यदि परिवर्तन की दर घट रही है तो हम ($-ve$ चिंन्ह) लेते है।

26. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए।

$f(x) = |x + 2| - 1$

Ans. दिया गया फलन $f(x) = |x + 2| - 1$

हम जानते है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $|x + 2| \geq 0$

इसलिए, प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $f(x) = |x + 2| - 1 \geq -1$

f का न्यूनतम मान तभी ज्ञात किया जा सकता है जब $|x + 2| = 0$

अर्थात $|x+2|=0 \Rightarrow x=-2$

$\therefore f$ का न्यूनतम मान $= f(-2) = |-2+2|-1 = 0-1 = -1$

इसलिए, $f(x)$ का न्यूनतम मान –1 है लेकिन $x=2$ पर कोई उच्चतम मान नहीं है।

27. फलन $f(x)=\sin x+\cos x \quad x\in[0,\pi]$ का निरपेक्ष उच्चतम व निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात करों?

हल:– $f(x)=\sin x+\cos x$

$= f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$ पर $\cos x - \sin x = 0$

$\cos x = \sin x$

$\tan x = 1$

$\frac{\pi}{4}\in[0,\pi]$

अतः $x=0$ पर $f(0)=\sin 0+\cos 0=1$

$x=\frac{\pi}{4}$ पर $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$x=\pi$ पर $f(\pi)=\sin\pi+\cos\pi=-1$

अतः निरपेक्ष निम्नतम मान = –1

निरपेक्ष उच्चतम मान = $\sqrt{2}$

28. एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 cm/sec की दर से बढ़ रहा है घन आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 cm लम्बा है।

हल:– घन का किनारा (भुजा) = 10 सेमी.

$\Rightarrow x=10\text{ cm}$

तथा $\frac{dx}{dt}=\frac{3\text{ cm}}{\text{sec}}$

घन का आयतन $V=x^3$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$=\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow\frac{dV}{dt}=3(10)^2\times3=900\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$

अतः घन का आयतन $900\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$ की दर से बढ़ रहा है।

29. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 सेमी. है?

हल:– गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या $x=10\text{ cm}$

गुब्बारे का आयतन $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{dv}{dr}=4\pi r^2$

$=\frac{dv}{dr}=4\pi(10)^2$

$=400\pi\frac{\text{cm}^3}{\text{cm}}$

अतः गोलाकार गुब्बारे का आयतन $400\pi\frac{\text{cm}^3}{\text{cm}}$ की दर से बढ़ रहा है।

30. अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=\sin x+\cos x$ निरन्तर ह्रासमान है जहाँ $x\in(\pi,2\pi)$ है?

हल:– $f(x)=\sin x+\cos x$

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$= f'(x)=0$ पर $\cos x-\sin x=0$

$= \tan x=1$

$= x=\frac{5\pi}{4}\in(\pi,2\pi)$

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ \hline \pi & & \frac{5\pi}{4} & & 2\pi \end{array}$$

अन्तराल $\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$ के बिन्दु $x=210^0$ पर

$f'(210)^o=\cos 210-\sin 210$

$=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=-\text{ive}$

अतः अन्तराल $\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$ में फलन निरन्ततर ह्रासमान होगा।

https://t.me/ShekhawatiMission100

अध्याय – 7
समाकलन

अंकभार (1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 12)

बहुविकल्पीय प्रश्नः—

1. $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2}dx$ का मान है?

(1) tan x - sec x + c (2) tan x + sec x + c
(3) - tan x + sec x + x (4) none of these

2. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}}dx$ का मान है

(1) $-\cot\frac{x}{2}-x+c$ (2) $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-x+c$
(3) $-2\cot\frac{x}{2}-x+c$ (4) $2\cot\frac{x}{2}-x+c$

3. $\frac{d}{dx}[f(x)]=4x^3-\frac{3}{x^4}$ तथा $f(2)=0$ तब $f(x)$ है?

(1) $x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$ (2) $x^3+\frac{1}{x^4}+\frac{129}{8}$
(3) $x^4+\frac{1}{x^3}+\frac{129}{8}$ (4) None of these

4. $\int \frac{dx}{x+x\log x}$ का मान है?

(1) $(1+\log x)+c$ (2) $\log_{10}(1+\log x)+c$
(3) $\log_e(1+\log x)+c$ (4) $\log_e(\log x)+c$

5. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right)dx$ है?

(1) 1 (2) 0 (3) −1 (4) $\frac{\pi}{4}$

6. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(x^3+x\cos x+\tan^5 x+1)dx$ है?

(1) 0 (2) 2
(3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

7. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान है?

(1) 0 (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

7. $\int \frac{e^{5\log x}-e^{3\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}dx$ है?

(1) $x+1+c$ (2) $\frac{x^2}{2}+x+c$
(3) x^2+x+c (4) $2x+x+c$

9. $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx$ है?

(1) $e^x\cos x+c$
(2) $e^x\sin x+c$
(3) $e^x\sec x+c$
(4) $e^x\tan x+c$

10. $\int \cos^2 2x\ dx$ है?

(1) $\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x+c$ (2) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 4x+c$
(3) $x+\frac{1}{8}\sin 4x+c$ (4) $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+c$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ का मान है?

(1) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+c$ (2) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+c$
(3) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+c$ (4) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+c$

12. $f(a+b-x)=f(x)$ तब $\int_a^b x\,f(x)\,dx$ है?

(1) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(a+b+c)dx$ (2) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$
(3) $\frac{a-b}{2}\int_a^b f(x)dx$ (4) $\frac{a+b}{4}\int_a^b f(x)dx$

13. $\int \log_{10} x \, dx$ का मान है?

(1) x log x - x+c (2) $\frac{1}{x}$

(3) $\log_e 10(x\log x - x + c)$

(4) $\log_{10} e(x\log x - x) + c$

14. $\int \log_x x \, dx$ का मान है?

(1) 1 (2) 0

(3) x + c (4) c

15. $\int \sin x^o dx$ बराबर है?

(1) $\frac{180}{\pi}\cos x^o + c$ (2) $-\frac{180}{\pi}\cos x^o$

(3) $-\frac{180}{\pi}\cos x + c$

(4) $-\frac{180}{\pi}\cos x^o + c$

-: Answer key :-

1-1, 2-3, 3-1, 4-3, 5-2, 6-4, 7-3, 8-2, 9-3, 10-1, 11-2, 12-2, 13-4, 14-3, 15-4

रिक्त स्थान की पुर्ति कीजिए–

1. फलन $x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ का समाकलन........... है।

2. $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx$ का मान .... है।

3. $\int_2^3 x^2 dx$ का मान................ है।

4. यदि f एक विषम फलन है तब $\int_{-5}^{5} f(x)dx =$................. होगा।

5. $\int_6^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}dx =$.................... है।

6. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)dx$ का मान...................... है।

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \cos^2 2x}$ का मान .... है

8. $\int \sqrt[3]{x^5}dx$ का मान .... है।

9. $\int 5^{-\log_5 x}dx$ का मान...................... है।

10. $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ का मान............... है।

11. $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$ का मान .... है।

उत्तरमाला :–

1. $\frac{x^3}{3} - x + c$

2. $\tan x - \sec x + c$

3. $\frac{19}{3}$

4. 0

5. $\frac{\pi^2}{32}$

6. log 2

7. $\frac{1}{2}[\tan 2x - \cot 2x] + C$ या $\log(\operatorname{cosec} 4x - \cot 4x) + C$

9. $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C$

9. $-\frac{1}{x} + C$

10. $\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$

11. $\frac{1}{1+\cos x} + c$

अतिलघुतरात्मक प्रश्न :–

1. $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ का मान ज्ञात करें।

हल:– यहाँ $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$ है जो किस विषम फलन है।

अत:– $d = 0$

2. $I = \int \frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}dx$ का घन हैं?

हल:– $I = \int \frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}dx$

माना $3\cos x + 2\sin x = t$

$(-3\sin x + 2\cos x)dx = dt$

$I = \int \frac{dt}{2t}$

$I = \frac{1}{2}\log(t) + c$

$I = \frac{1}{2}\log(3\cos x + 2\sin x) + c$

2. $I = \int \cos(\sin^{-1} x)dx$ का मान है?

हल:– माना $\sin^{-1} x = \theta$

$\Rightarrow x = \sin\theta$ तब $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

$I = \int \cos\left[\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\right]dx$

$I = \int\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx$

$I = \boxed{\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x + c}$

4. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + x}dx$

हल:– $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left[1+\sqrt{x}\right]}dx$

माना $1+\sqrt{x} = t$ तब $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$

$I = 2\int \frac{dt}{t}$

$I = 2\log t + c$

$= 2\log(1+\sqrt{x}) + c$

5. $I = \int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

हल:– $I = \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$= \int \tan^2\frac{x}{2}dx$

$= \int\left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right)dx$

$= \boxed{2\tan\frac{x}{2} - x + c}$

6. $\int \frac{\sin^2 x\ dx}{1+\cos x}$

हल:– $\int \frac{(1-\cos^2 x)dx}{1+\cos x}$

$= \int \frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)}dx$

$= \int (1-\cos x)dx$

$= \boxed{x - \sin x + c}$

7. $\int x^2 e^{x^3}dx$

हल:– माना $x^3 = t$

$\Rightarrow 3x^2dx = dt$ अत: $\frac{1}{3}\int e^t\ dt = \frac{1}{2}e^t + c$

$= \boxed{\frac{1}{3}e^{x^3} + c}$

8. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{x}dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. $I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{x}dx$

$I = 2[\log x]_1^{\sqrt{2}}$

$I = 2\left[\log\sqrt{2} - \log(1)\right]$

$I = 2\log\sqrt{2} - 0$

$\boxed{I = \log 2}$

9. $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ का मान है?

हल:– $I = \int \frac{dx}{e^x - \frac{1}{e^{-x}}}$

$I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$

माना $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$I = \int \frac{dt}{t^2+1}$

$= \tan^{-1}(t) + c$

$= \tan^{-1}(e^x) + c$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$

हल:– $= [\log \sec x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \log\left(\sec\frac{\pi}{4}\right) - \log(\sec 0)$

$= \log\left(\sqrt{2}\right) - \log(1)$

$= \frac{1}{2}\log 2$

लघुउत्तरीय प्रश्नः–

1. $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

हल:– माना $\sin^{-1} x = t$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$

अतः– $I = \int t \, dt$

$I = \frac{t^2}{2} + c$

$I = \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2} + c$

2. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4}} dx$

हल:– माना $\tan x = t$

$\sec^2 dx = dt$

$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2^2}}$

$= \log\left[t + \sqrt{t^2 + 4}\right] + c$

$= \log\left[\tan x + \sqrt{\tan^2 + 4}\right] + c$

3. $I = \int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$

$= \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2} dx$

$= \int e^x \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx$

सूत्र – $\int e^x \left[f(x) + f^1(x)\right] dx = e^x f(x) + c$

अतः– $I = \frac{e^x}{1+x} + c$

4. $I = \int_0^1 x \, e^{x^2} dx$

हल:– माना $x^2 = t \Rightarrow 2x \; dx = dt$

अब $x = 0$ पर $t = 0$ तथा $x = 1$ पर $t =$

$I = \frac{1}{2}\int_0^1 et \; dt$

$I = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_1^0$

$= \frac{1}{2}[e - 1] + c$

5. $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx$

हल:– $\sin^2 x$ एक सम फलन है।

अतः– $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x + x$

$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$

$I = \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} - (0-0)$

$= \boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

दीर्घउत्तरीय प्रश्नः–

1. समाकलन $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ ज्ञात कीजिए–

हलः– $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[x^2+4x-5\right]}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[x^2+4x-5+4-4\right]}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[(x+2)^2-9\right]}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$

$$I = \sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$$

2. $\int \frac{dx}{\left(e^x-1\right)}$ का मान ज्ञात करें?

हलः– $I = \int \frac{dx}{\left(e^x-1\right)}$

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x-1\right)}$$

माना $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{t(t-1)}$$

$$I = \int \frac{dt}{t^2-t}$$

$$I = \int \frac{dt}{t^2-t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$I = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$I = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\log\left[\frac{t-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right]+C$$

$$I = \log\left[\frac{t-1}{t}\right]+C$$

$$I = \log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)+C$$

नोटः– इस सवाल को आंशिक भिन्न द्वारा भी हल कर सकते है।

3. समाकलन $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ को हल कीजिए–

हलः– $I = \int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

माना $\sin^{-1}x = t$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt$ तब $x = \sin t$

अतः $\int t \ \sin t \ dt$

$$I = t\times(-\cos t)-\int(1\times-\cos t)dt$$

$$I = -t\cos t+\sin t+c$$

$$I = -\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x+x+c$$

4. $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)}dx$

$x-a = t$

$\Rightarrow dx = dt$

$$I = \int \frac{\sin(t+a)}{\sin t}dt$$

$$I = \int \frac{\sin t\cos a+\cos t\sin a}{\sin t}dt$$

$$I = \int(\cos a+\sin a\cot t)dt$$

$$I = t\cos a+\sin a\log\sin t+c$$

$$I = (x-a)\cos a+\sin a\log\sin(x-a)+c$$

$$I = x\cos a+\sin\log\sin(x-a)+c_1$$

जहाँ $c_1 = c-a\cos a$

5. $\int_0^4 |x-1|\,dx$ ज्ञात कीजिए–

हल:– $\int_0^4 |x-1|\,dx \qquad |x-1| = \begin{cases} -(x-1) & x \\ (x-1) & x \end{cases}$

अत:– $f(x) = \int_0^1 -(x-1)dx + \int_1^4 (x-1)dx$

$$I = -\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^4$$

$$I = -\left[\left(\frac{1}{2} - 1\right) - 0\right] + \left[\left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2} + \left[4 + \frac{1}{2}\right] = 5$$

6. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)} dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$

माना $\sin x = t$

अत: $\cos x\, dx = dt$

यदि $x = 0$ तब $t = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ तब $t = 1$

अत: $I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\,(2+t)}$

आंशिक भिन्नों में वियोजित करने पर

$$\frac{1}{(1+t)\,(2+t)} = \frac{A}{(1+t)} + \frac{B}{(2+t)}$$

$\Rightarrow \; 1 = A(2+t) + B(1+t)$

$t = -1$ पर $\boxed{A = 1}$

$t = -2$ पर $\boxed{B = -1}$

अत: $I = \int_0^1 \left[\frac{1}{(1+t)} - \frac{1}{(2+t)}\right] dt$

$I = [\log(1+t) - \log(2+t)]_0^1$

$I = (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2)$

$I = 2\log 2 - \log 3$

$I = \log 4 - \log 3$

$\Rightarrow \boxed{I = \log\frac{4}{3}}$

7. $\int \frac{\cos 2x \;\; dx}{(\cos x + \sin x)^2}$ का मान ज्ञात करो?

Sol. माना $I = \int \frac{\cos 2x \;\; dx}{(\cos x + \sin x)^2}$

$$I = \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)dx}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$I = \int \frac{(\cos x + \sin x)\,(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} dx$$

$$I = \int \frac{(\cos x - \sin x)\,dx}{(\cos x + \sin x)}$$

माना $\cos x + \sin x = t$

$\Rightarrow$ $(-\sin x + \cos x)\, dx = dt$

अत: $I = \int \frac{dt}{t}$

$I = \log t + c$

$\boxed{I = \log(\cos x + \sin x) + c}$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$ का मान होगा।

हल:– माना $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cot x}} dx$ ——— समीकरण (1)

P_3 गुणधर्म लगाने पर

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$ ——— समीकरण (2)

समीकरण (1) + समीकरण (2) से –

$$2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1)dx$$

$$2I = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$2I = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{12}$$

निम्बन्धात्मक प्रश्न :–

1. $x \tan^{-1} x$ का समाकलन ज्ञात कीजिए।

हलः–माना $I = \int x \tan^{-1} dx$

$$I = \tan^{-1} x \times \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$I = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$$

$$I = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} - \frac{1}{2} \int 1\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$$

2. $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \sin(x+\alpha)}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\, [\sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^4 x\, [\cos\alpha + \cot x \sin\alpha}}$$

$$I = \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x\, dx}{\sqrt{\cos\alpha + \cot x \sin\alpha}}$$

माना :–

$$\cos\alpha + \cot x \sin\alpha = 1$$

$$\Rightarrow -\sin\alpha \operatorname{cosec}^2 x\, dx = dt$$

$$I = -\frac{1}{\sin\alpha} \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$I = -\frac{1}{\sin\alpha} \times 2\sqrt{t} + c$$

$$I = \frac{-2}{\sin\alpha} \sqrt{\cos\alpha + \cot x \sin\alpha} + c$$

$$I = \frac{-2}{\sin\alpha} \sqrt{\cos\alpha + \frac{\cos x}{\sin x} \sin\alpha} + c$$

$$I = \frac{-2}{\sin\alpha} \sqrt{\frac{\sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha}{\sin x}} + c$$

$$I = \frac{-2}{\sin\alpha} \sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}} + c$$

3. $$I = \int \frac{(x+2)dx}{2x^2+6x+5}$$

हलः– माना $x + 2 = A \frac{d}{dx}(2x^2+6x+5) + B$

$$x + 2 = A(4x+6) + B$$

तुलना करने पर

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

तथा $6A + B = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

अतः– $$I = \int \frac{\frac{1}{4}(4x+6) + \frac{1}{2}}{2x^2+6x+5} dx$$

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{(4x+6)}{2x^2+6x+5} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$I = \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{2} I_2$ ———————— समीकरण (1)

अब $I_1 = \int \frac{(4x+6)dx}{2x^2+6x+5}$

माना $2x^2 + 6x + 5 = t$

$$(4x+6)dx = dt$$

$$I_1 \int \frac{dt}{t} = \log t + c_1$$

$$\boxed{I_1 = \log(2x^2+6x+5)+c_1}$$

अब $I_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+\frac{1}{4}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\left[\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right]+C_2$$

$$\boxed{I_2 = \tan^{-1}[2x+3]+C_2}$$

अतः $I = \frac{1}{4}\log(2x^2+6x+5)+\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3)$

4. $\int \frac{(2\sin\theta-2)\cos\theta \; d\theta}{5-\cos^2\theta-4\sin\theta}$ का मान ज्ञात करो?

हल:– माना $I = \int \frac{(2\sin\theta-2)\cos\theta \; d\theta}{5-\cos^2\theta-4\sin\theta}$

$$I = \int \frac{(2\sin\theta-2)\cos\theta \; d\theta}{5-1+\sin^2\theta-4\sin\theta}$$

माना $\sin\theta = t$

$\Rightarrow \cos\theta \; d\theta = dt$

$$I = \int \frac{(3t-2)}{t^2-4t+4}$$

$$I = \int \frac{(3t-2)}{(t-2)^2}dt$$

आंशिक भिन्न में नियोजित करने पर

$$= \frac{3t-2}{(t-2)^2} = \frac{A}{(t-2)}+\frac{B}{(t-2)^2}$$

$$= \boxed{(3t-2) = A(t-2)+B}$$

$t=0$ पर -2 = - 2 A + B

$t=2$ पर 4 = B

अतः $A = 3$

अत : $I = 3\int \frac{dt}{(t-2)}+4\int \frac{dt}{(t-2)^2}$

$$I = 3\log|(t-2)\frac{-4}{(t-2)}+c$$

$$\boxed{I = 3\log(\sin\theta-2)-\frac{4}{(\sin\theta-2)}+C}$$

5. सिद्ध कीजिए $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

Sol. माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$ ——————— (1)

गुणधर्म P_4 लगाने पर

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{2}{1+\tan x}\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\log 2-\log(1+\tan x)]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$$

$I = \log 2[x]_0^{\frac{\pi}{4}} - I$ समीकरण (1) से

$$2I = \log 2\left[\frac{\pi}{4}-0\right]$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{8}\log 2}$$

6. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. $I = \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx$ ——— (1)

गुणधर्म P_4 लगाने पर

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{a^2\cos^2(\pi - x) + b^2\sin^2(\pi - x)}$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - \int \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$\because \int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx$$

यदि F(2a - x) = F (x)

अतः यहाँ $F(x) = \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

$$F(\pi - x) = \frac{1}{a^2\cos^2(\pi - x) + b^2\sin^2(\pi - x)}$$

$$\Rightarrow F(\pi - x) = \frac{1}{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 x}$$
$$= F(x)$$

अतः $2I = \pi \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

$$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 + b^2\tan^2 x}$$

($\cos^2 x$ का अंश व हर में भाग लगाने पर)

माना $b\tan x = t$ यदि $x = 0$ तब $t = 0$

$\Rightarrow b\sec^2 x\,dx = dt$ $\quad x = \frac{\pi}{2}$ तब $t = \infty$

अतः $I = \frac{\pi}{b}\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2}$

$$I = \frac{\pi}{b} \times \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{t}{a}\right]_0^{\infty}$$

$$I = \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0\right]$$

$$I = \frac{\pi}{ab}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$I = \frac{\pi^2}{2ab}$$

7. समाकलन $\int_0^{\pi} \frac{x\tan x\,dx}{\sec x + \tan x}$ का मान ज्ञात करो?

Sol. माना $I = \int_0^{\pi} \frac{x\tan x\,dx}{\sec x + \tan x}$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \sin x}dx$ ——— (1)

P_4 गुणधर्म लगाने पर

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1 + \sin(\pi - x)}dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1 + \sin x}dx$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1 + \sin x} - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x\,dx}{1 + \sin x}$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1 + \sin x} - I$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1 + \sin x}$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x(1 - \sin x)dx}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{(\sin x - \sin^2 x)dx}{1 - \sin^2 x}$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\left[\sec x\tan x - \tan^2 x\right]dx$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\left[\sec x\tan x-\sec^2 x+1\right]dx$$

$$2I = \pi\left[\sec x-\tan x+x\right]_0^{\pi}$$

$$2I = \pi\left[\sec\pi-\tan\pi+\pi\right]-\pi\left[\sec 0-\tan 0+0\right]$$

$$2I = \pi\left[-1-0+\pi\right]-\pi\left[1-0+0\right]$$

$$2I = -\pi+\pi^2-\pi$$

$$2I = \pi^2-2\pi$$

$$\boxed{I=\frac{\pi^2}{2}-\pi}$$

8. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ का मान ज्ञात करों?

हलः– माना $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

x के निष्कासन नियम से –

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

माना $\cos x=t$ तथा $x=0$ पर $t=1$

$-\sin x\ dx=dt$ $x=\pi$ पर $t=-1$

$$I=-\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$I=-\frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1}\right]_1^{-1}$$

$$I=-\frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1}(-1)-\tan^{-1}1\right]$$

$$I=-\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$I=\frac{-\pi}{2}\times\frac{-\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$$

9. $\int\frac{(2\sin\theta-2)\cos\theta\ d\theta}{5-\cos^2\theta-4\sin\theta}$ का मान ज्ञात करो?

हलः– माना $I=\int\frac{(2\sin\theta-2)\cos\theta\ d\theta}{5-\cos^2\theta-4\sin\theta}$

$$I=\int\frac{(2\sin\theta-2)\cos\theta\ d\theta}{5-1+\sin^2\theta-4\sin\theta}$$

माना $\sin\theta=t$

$\Rightarrow \cos\theta\ d\theta=dt$

$$I=\int\frac{(3t-2)}{t^2-4t+4}$$

$$I=\int\frac{(3t-2)}{(t-2)^2}dt$$

आंशिक भिन्न में नियोजित करने पर

$$=\frac{3t-2}{(t-2)^2}=\frac{A}{(t-2)}+\frac{B}{(t-2)^2}$$

$$=\boxed{(3t-2)=A(t-2)+B}$$

$t=0$ पर $-2=-2A+B$

$t=2$ पर $4=B$

अतः $A=3$

अत : $I=3\int\frac{dt}{(t-2)}+4\int\frac{dt}{(t-2)^2}$

$$I=3\log l(t-2)\ \frac{-4}{(t-2)}+c$$

$$\boxed{I=3\log(\sin\theta-2)-\frac{4}{(\sin\theta-2)}+C}$$

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

1. $\int x^2\log x\ dx$ का मान होगा?
2. $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\phi}\cos^5\phi\ d\phi$ का मान होगा?
3. $\int_0^2 x\sqrt{2-x}dx$ का मान होगा?
4. $\int\cos^3 x\ e^{\log\sin x}dx$ का मान होगा?
5. $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\ dx$ का मान होगा?
6. $\int_0^{\pi}e^x\left[\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right]dx$ का मान होगा?
7. $\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x\cos x dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$ का मान होगा?
8. $\int e^x\left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)dx$ का मान होगा?

अध्याय – 8
क्षेत्रकलन

अंकभार (1 + 1 + 2 = 4)

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल है?

(1) 6π (2) 36π
(3) 9π (4) 3π

2. अन्तराल $[a,b]$ में दो वक्र $y=f(x)$ तथा $y=g(x)$ है तथा $f(x)\le g(x)$ तथा $x=a, x=b$ के मध्य इन वक्रो से धिरा क्षेत्रफल है?

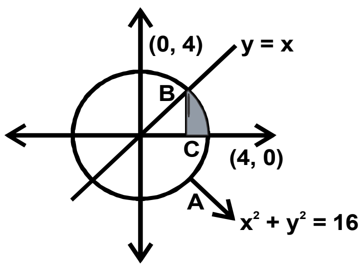
(1) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ (2) $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$

(3) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx$ (4) $\int_a^b [f(x)\ g(x)]dx$

3. $x=0$ से $x=\pi$ तक वक्र $y=\sin x$ के बीच क्षेत्रफल है?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

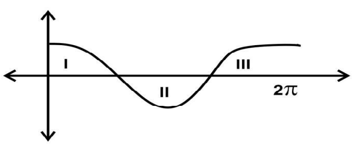
4.



इस चित्र में छांयाकित भाग का क्षेत्रफल है?

(1) $\int_2^4 \sqrt{16-x^2}dx$ (2) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$

(3) $\int_{2\sqrt{2}}^4 \sqrt{16-x^2}dx$ (4) $\int_{\sqrt{2}}^4 \sqrt{16-x^2}dx$

5. 

निम्न में से किस भाग का क्षेत्रफल आंकिक रूप से ऋणात्मक आयेगा।

(1) I (2) II (3) III (4) None

6. रेखा $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ तथा निर्देशी अक्षों के बीच का क्षेत्रफल है?

(1) 6 (2) 3

(3) 12 (4) $\frac{3}{2}$

Answer key

1-1, 2-2, 3-2, 4-3, 5-2, 6-2

रिक्त स्थान की पूर्ति करें–

1. वक्र $y=x^3, x-$अक्ष एंव कोटियो $x=-2, x=0$ तक क्षेत्रफल .... है।

2. वक्र $y=x^2$ तथा रेखा $y=4$ के बीच का क्षेत्रफल है।

3. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=2$ का $x-$अक्ष के ऊपर का क्षेत्रफल........ ..... है।

उत्तरमाला:–

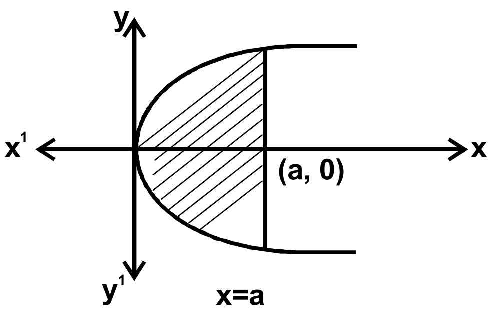
(1) 4 वर्ग इकाई

(2) $\frac{32}{3}$ वर्ग इकाई

(3) $2\sqrt{6}\pi$ वर्ग इकाई

अतिलघुत्रात्मक प्रश्न

1. परवलय $y^2=4ax$ एवं इसके नाभिलम्ब के बीच का क्षेत्रफल है?



हल:–

परवलय की नाभि (a, 0) होती है।

अभिष्ठ क्षेत्रफल $= 2\times\int_0^a y\,dx$

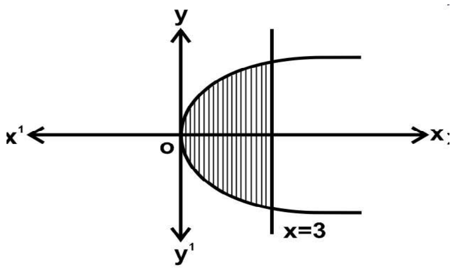
$= 2\times\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dx$

$= 4\sqrt{a}\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$= \frac{8\sqrt{a}}{3}\left[a\sqrt{a}-0\right]=\frac{8a^2}{3}$ वर्ग इकाई

4. वक्र $y^2=4x$ एंव रेखा $x=3$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करो?

हलः–



अभिष्ठ क्षेत्रफल $= 2x\int_0^3 y\,dx$

{ ∴ परवलय $y^2=4x$, $y-$अक्ष के सापेक्ष सममित है।}

$= 2x\int_0^3 2\sqrt{x}\,dx$

$= 4\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

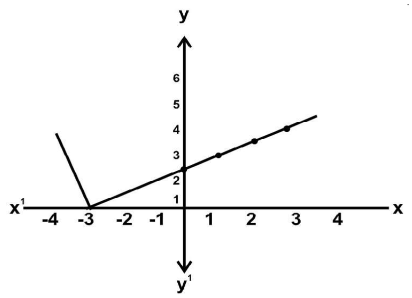
$= \frac{8}{3}\times[3\sqrt{3}-0]$

$= 8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

3. $y=|x+3|$ का ग्राफ खीचीएः–

हलः– $y=|x+3|$

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	-4
y	3	4	5	6	2	1	0	1



अध्याय – 9
अवकल समीकरण

अंकभार (1 + 1 + 1 + 3 = 6)

1. अवकल समीकरण $\frac{2x^2d^2y}{dx^2}-\frac{3dy}{dx}+y=0$ की कोटि हैं

(1) 2 (2) 1

(3) 0 (4) परिभाषित नहीं है।

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6y=\log x$ की घात है –

(1) 1 (2) 2

(3) अपरिभाषित (4) 0

3. किसी अवकल समीकरण की घात व कोटि हमेशा होती है।

(1) धनात्मक, पूर्णाक (2) ऋणात्मक पूर्णाक

(3) धनात्मक व ऋणात्मक पूर्णांक

(4) कोई नहीं

4. यदि (दिये गये अवकल समीकरण में) p और q डिग्री और घात हो, तो 2p - 3q का मान होगा।

(1) 7 (2) -7

(3) 3 (4) -3

Ans. 4

5. $\cos\frac{dy}{dx}=a$ अवकल समीकरण का हल है जब $y=1$ व $x=0$

(1) $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right)$ (2) $\cos\left(\frac{y-1}{x}\right)$

(3) $\sin\left(\frac{y-1}{x}\right)$ (4) कोई नहीं

Ans. (2)

6. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=y\tan x,\ y=1$ का हल है जब $x=0$ हो।

(1) y = sec x (2) y = tan x

(3) y = -sec x (4) y = sec x + tan x

7. चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है–

(1) 0 (2) 2

(3) 3 (4) 4

Ans. 4

8. निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से किस समीकरण का व्यापक हल $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ है–

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$ (4) $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0$

Ans. 2

9. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ निम्नलिखित समीकरण की घात तथा कोटि ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{d^2y}{dx^2}$ अवकलन की कोटि 2 तथा इस समीकरण का बांया पक्ष अवकलनों में बहुपद नहीं है, इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

10. सत्यापित कीजिए कि फलन $y=a\cos x+b\sin x$ जिसमें $a,b\in R$, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ का हल है।

Ans. दिया हुआ फलन है $y=a\cos x+b\sin x$ 1

समीकरण 1 के दोनों पक्षों को x, के सापेक्ष उत्तरोतर अवकलन करने पर हम देखते है–

$$\frac{dy}{dx}=-a\sin x+b\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a\cos x-b\sin x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ एवं y का मान दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त करते है।

बांया पक्ष $=(-a\cos x-b\sin x)+(a\cos x+b\sin x)=0$

दायां पक्ष

11. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{2-y},(y\neq 2)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया गया है कि $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{2-y},(y\neq 2)$ 1

समीकरण 1 के चरों को पृथक करने पर हम प्राप्त करते है –

$(2-y)dy=(x+1)dx$ 2

समीकरण 2 के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int(2-y)dy=\int(x+1)dx$$

अथवा $2y-\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+x+c_1$

अथवा

$$x^2+y^2+2x-4y+2c_1=0$$

$$x^2+y^2+2x-4y+c=0$$

$c=2c_1$ समीकरण का व्यापक हल है।

12. $y\log y dx-xdy=0$ अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया है $y\log y dx-xdy=0$

$$y\log y dx=xdy$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y\log y}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y\log y}$$

यहां $\log y=t$ रखने पर–

$$\frac{1}{y}dy=dt\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1}{t}.dt$$

$$\Rightarrow\log|x|=\log|t|+c_1$$

$$\log|x|=\log|\log y|+c_1$$

$$\log|x|-\log|\log y|=c_1$$

$$\log\left|\frac{x}{\log y}\right|=c_1$$

$\frac{x}{\log y}=e^{c_1}=A$ (माना)

$$x=A\log y$$

$$\log y=\frac{1}{A}x=cx$$

$y=e^{cx}$ (अभिष्ट हल)

13. $x^5\frac{dy}{dx}=-y^5$ अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात करो।

Sol. $x^5dy=-y^5dx$

$\frac{dy}{y^5}=-\frac{dx}{x^5}$ (x^5 व y^5 का पक्षान्तरण करने पर)

$$\int\frac{1}{y^5}dy=-\int\frac{1}{x^5}dx$$

$$\Rightarrow\int y^{-5}dy=-\int x^{-5}dx$$

$$\Rightarrow\frac{y^{-5+1}}{-5+1}=-\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+C^1$$

$$-\frac{1}{4y^4}=\frac{1}{4x^4}+C^1$$

$$-\frac{1}{4y^4}-\frac{1}{4x^4}=C^1$$

$\frac{1}{y^4}+\frac{1}{x^4}=-4C^1$ (-4 से गुणा करने पर)

अतः $\boxed{y^{-4}+x^{-4}=C}$ $(\because -4C^1=C)$

14. $x\frac{dy}{dx}-y+x\sin\frac{y}{x}=0$ समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. प्रश्नानुसार $x\frac{dy}{dx}-y+x\sin\frac{y}{x}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x\sin\frac{y}{x}}{x}=f(x,y)$$

$$\therefore f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda y-\lambda x\sin\frac{\lambda y}{\lambda x}}{\lambda x}=\frac{\lambda\left(y-x\sin\frac{y}{x}\right)}{\lambda x}$$

$$=\lambda^o f(x,y)$$

https://t.me/ShekhawatiMission100

$\therefore f(x,y)$ समघातीय फलन है जिकी घात शून्य है।

$y = vx$ रखने पर,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

या $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx - x\sin\frac{vx}{x}}{x} = v - \sin v$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर –

$$\int \frac{2-\log v}{-v+v\log v}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1-\log v+1}{v(-1+\log v)}dv = \log|x| + \log C$$

$$-\log|v| + \log|\log v - 1| = \log|x| + \log C$$

$$\log|\log v - 1| = \log v + \log x + \log x = \log|Cvx|$$

$$\log v - 1 = Cvx$$

$$\log v = 1 + Cvx$$

$$\log\frac{y}{x} = 1 + C.\frac{y}{x}.x$$

$$= \frac{y}{x}, \log\frac{y}{x} = 1 + Cy$$

अभिष्ट हल $Cy = \log\frac{y}{x} - 1$

15. $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0, y = 2$ यदि $x = 1$ समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. अवकल समीकरण $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0$

$$2x^2\frac{dy}{dx} = 2xy + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy + y^2}{2x^2} \quad \text{..........................1}$$

अब $y = vx$ रखने पर –

$$\frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x.vx + v^2x^2}{2x^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v^{-2}dv = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर–

$$\int v^{-2}dv = \frac{1}{2}.\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{2}\log|x| + C$$

$$\frac{-1}{v} = \frac{1}{2}\log|x| + C$$

पुनः $v = \frac{y}{x}$ रखने पर –

$$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log|x| + C \quad \text{..........................} \quad 2$$

अब $x = 1, y = 2$ रखने पर

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 1 + C$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

C का मान समीकरण 2 में रखने पर

$$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}[1 - \log|x|]$$

अतः अभिष्ट हल $y = \frac{2x}{1 - \log|x|}$

16. अवकल समीकरण $(\tan^{-1}y - x)dy = (1 + y^2)dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप से लिखा जा सकता है।

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \quad \text{......................1}$$

समीकरण 1, $\frac{dx}{dy} + p_1x = Q_1$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहां $p_1 = \frac{1}{1+y^2}$ एवं $Q_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$

$I.F.=e^{\int\frac{1}{1+y^2}dy}=e^{\tan^{-1}y}$

इसलिए अवकल समीकरण का हल है–

$\Rightarrow xe^{\tan^{-1}y}=\int\left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right)e^{\tan^{-1}y}dy+C$ 2

$I=\int\left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right)e^{\tan^{-1}y}dy$

$\Rightarrow \tan^{-1}y=t$ रखने पर हम पाते हैं कि $\left(\frac{1}{1+y^2}\right)dy=dt$

अतः $I=\int te^t dt, I=te^t-\int 1.e^t e^t, I=te^t=e^t(t-1)$

$I=e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y-1)$

समीकरण 2 में I का मान प्रतिस्थापित करने पर–

$x.e^{\tan^{-1}y}=e^{\tan^{-1}y}\left(\tan^{-1}y-1\right)+C$ पाते है।

$x=\left(\tan^{-1}y-1\right)+Ce^{\tan^{-1}}y$ (अभिष्ट हल)

17. $\frac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x$; $y=2$ यदि $x=\frac{\pi}{2}$ तो अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

Ans. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x$

यह $\frac{dy}{dx}+py=Q$ के रूप का अवकल समीकरण है–

अतः $p=-3\cot x$ $\quad Q=\sin 2x$

$\therefore \text{I.F.}=e^{\int p.dx}=e^{\int -3\cot xdx}=e^{-3\log\sin x}$

$=e^{\log(\sin x)^{-3}}=\frac{1}{\sin^3 x}=\operatorname{cosec}^3 x$

$I.F.=\operatorname{cosec}^3 x$

अवकल समीकरण का हल–

$y.I.F.=\int Q.I.F.dx+C$

$\Rightarrow y.\operatorname{cosec}^3 x=\int \sin 2x.\operatorname{cosec}^3 xdx+C$

$=\int 2\sin x.\cos x.\operatorname{cosec}^3.dx+C$

$=2\int \cot x.\operatorname{cosec} x\,dx+C$

$\Rightarrow y.\operatorname{cosec}^3 x=-2\operatorname{cosec} x+C$

$y=-2\sin^2 x+C\sin x$

$x=\frac{\pi}{2}$ तथा $y=2$ रखने पर $C=4$

अतः $y=-2\sin^2 x+4\sin^3 x$

18. बिन्दु (0,0) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $y'=e^T\sin x$ है।

Ans. $y'=e^T\sin x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^T\sin x$

$\Rightarrow dy=e^T\sin xdx$

$\int dy=\int e^T\sin xdx$

$y=\int e^T\sin xdx+C$

माना कि $I=\int e^x\sin xdx$

e^x को पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$I=e^x(-\cos x)-\int e^x(-\cos x)dx$

$=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx$

$\int e^x\cos xdx$ का खण्डशः समाकलन करने पर–

$I=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx$

$=-e^x\cos x+e^x\sin x-I$

$\therefore 2I=-e^x cox+e^x\sin x$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^x(-\cos x+\sin x)$

I का मान समीकरण 1 में रखने पर

$y=\frac{1}{2}e^x(-\cos x+\sin x)+C$

$x=0, y=0$ रखने पर

$o=-\frac{1}{2}\times 1+C$ $\quad\Rightarrow C=\frac{1}{2}$

इसलिए समीकरण का अभिष्ट हल होगा–

$y=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}$

19. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि r% वार्षिक की दर से होती हैं यदि 100 रुपये 10 वर्षों में दुगुने हो जाते हैं तो r का मान ज्ञात कीजिए। ($\log_e 2 = 0.6931$)

Ans. माना किसी समय t पर मूलधन p है एवं दर r है।

अतः $\frac{dP}{dt} = \frac{\Pr}{100}$

$\therefore \frac{dP}{dt} = \frac{\Pr}{100} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{rdt}{100}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dP}{P} = \int \frac{r}{100} dt$$

$$\log P = \frac{r}{100} t + \log C$$

$$\therefore \log P - \log C = \frac{r}{100} t$$

$$\Rightarrow \log \frac{P}{C} = \frac{r}{100} t \Rightarrow \frac{P}{C} = e^{\frac{r}{100}t}$$

$$\Rightarrow P = Ce^{\frac{t}{100}t} \quad \text{......................1}$$

जब $t = 0, P = 100$ तो समीकरण से

$100 = Ce^{o} \Rightarrow C = 100$

समीरण 1 में C का मान रखने पर

$$P = 100e^{\frac{r}{100}t}$$

तथा जब $t = 10, P = 200$ तो समीकरण 1 से

$$200 = 100e^{\frac{r}{100}t \times 10}$$

$$2 = e^{\frac{r}{10}}$$

$$\therefore \frac{r}{10} = \log 2$$

$$\Rightarrow r = -10 \log 2 = 10 \times 0.6931$$

$$\therefore r = 6.931\%$$

20. (x - y) dy - (x + y) dx = 0 समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात करो।

Sol. (x - y) dy = (x + y) dx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

$\because$ y = vx रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x+vx}{x-vn}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x(1+v)}{x(1-v)}$$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v} - \frac{v}{1} = \frac{1+v-v+v^2}{1-v} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v} \quad \Rightarrow \frac{1-v}{1+v^2}dv = \frac{1}{x}dx$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{1-v}{1+v^2}dv = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int \frac{2v}{v^2+1}dv + \int \frac{dv}{1+v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\log(v^2+1) + \tan^{-1} v = \log|x| + c \qquad v = \frac{y}{x}$$

रखने पर

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) + \tan^{-1}\frac{y}{x} = \log|x| + c$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{1}\right) - \log|x| = c$$

अतः अभीष्ट हल $\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\frac{x^2+y^2}{x^2} - \log|x| = c$

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\frac{x^2+y^2}{x^2}\cdot x^2 = c$$

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) = c$$

$$\boxed{\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c}$$

21. $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$; $y = 0$ व $x = 1$ समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+2xy=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2xy}{1+x^2}=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$; $(1+x^2)$ से भाग करने पर

$\dfrac{dy}{dx}=pq=Q$ से तुलना करने पर

$P=\dfrac{2x}{1+x^2},\quad Q=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

$\therefore \int Pdx=\int\dfrac{2x}{1+x^2}dx$ $\quad \because 1+x^2=u$ रखने पर

$2ndx = du$

$\Rightarrow \int Pdx=\int\dfrac{du}{u}=lyu=\log(1+x^2)$

$\therefore$ I. F. $= e^{\int Pdx}=e^{\log(1+x^2)} \Rightarrow 1+x^2$

$\therefore$ $y\times 1.f = \int Q\times I.F.\ dx + C$ से

$y\cdot(1+x^2)=\int\dfrac{1}{(1+x^2)^2}(1+x^2)dx+C$

$y\,(1+x^2)=\int\dfrac{dx}{1+x^2}+C$

$y\,(1+x^2)=\tan^{-1}x+C$

$x=1$ तथा $y=0$ रखने पर

$0\,(1+1^2)=\tan^{-1}1+C$

$0=\tan^{-1}1+C \quad\Rightarrow\quad 0=\dfrac{\pi}{u}+C$

$\therefore C=-\dfrac{\pi}{4}$

अतः अभीष्ट हल = $\boxed{y(1+x^2)=\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{4}}$

https://t.me/ShekhawatiMission100

अध्याय – 10
सदिश बीजगणित

अंकभार (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7)

1. मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो मात्रक सदिश है और उनके बीच का कोण θ है तो $\vec{a}+\vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि –

(1) $R=\frac{\pi}{4}$ (2) $\theta=\frac{\pi}{3}$

(3) $\theta=\frac{\pi}{2}$ (4) $\theta=\frac{2\pi}{3}$

Ans. 4

2. यदि A(1, 1, 2), B(1, 2, 5) और C (1, 5, 5) ΔPQR के शीर्ष हो, तो क्षेत्रफल होगा।

(1) $\frac{\sqrt{61}}{2}$ वर्ग इकाई (2) $\sqrt{61}$ वर्ग इकाई

(3) $61\sqrt{2}$ वर्ग इकाई (4) 2 वर्ग इकाई

Ans. (1)

3. यदि शून्येत्तर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण 'a' है और λ एक शून्येतर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है यदि

(1) $\lambda=1$ (2) $\lambda=-1$

(3) $a=|\lambda|$ (4) $a=\frac{1}{|\lambda|}$

Ans. (4)

4. यदि $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ हो, तो $\vec{a}\cdot\vec{b}$ का मान होगा –

(1) 9 (2) 10

(3) 20 (4) $2\sqrt{5}$

Ans. (2)

5. यदि सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ तथा $6\hat{i}+4p\hat{j}+q\hat{k}$ समान्तर हो, तो p तथा q के मान क्रमशः होंगे –

(1) (-1, -2) (2) (-1, 2)

(3) (1, 2) (4) (1, -2)

7. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ लंब है $\vec{c}$ पर तो λ का मान होगा?

(1) 8 (2) 10

(3) 6 (4) 4

Ans. (1)

8. यदि $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ और $a\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ संरेख है तो a का मान होगा –

(1) 3 (2) 4 (3) -4 (4) -3

Ans. (3)

9. यदि $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ हो तो $\vec{a}+\vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश होगा –

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{k})$

(3) $\frac{1}{2}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. 2

10. यदि A(1, 1,2), B (2, 3, 5) तथा C(1, 5, 5) ΔABC के शीर्ष हो तो क्षेत्रफल होगा–

(1) $\sqrt{61}$ वर्ग इकाई (2) $\frac{1}{2}\sqrt{61}$ वर्ग इकाई

(3) $61\sqrt{2}$ वर्ग इकाई (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. 2

11. सदिश $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ का सदिश $\vec{b}=4\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k}$ पर प्रक्षेप होगा –

(1) 19 (2) $19\sqrt{9}$

(3) $\frac{19}{\sqrt{9}}$ (4) $\frac{19}{9}$

Ans. 4

12. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i) दिक्कोसाइन के समानुपाती संख्याऐं lr, mr, br सदिश $\vec{r}$ के . ... कहलाते है।

Ans. दिक्अनुपात

(ii) सदिश $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के दिक्कोसाइन .... होंगे।

Ans. $\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}$

(iii) समान्तर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाये $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है तो सदिश क्षेत्रफल................ होगा।

Ans. $\vec{a}\times\vec{b}$

(iv) सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ के दिक्कोसाइन....................... होंगे।

Ans. $\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$

(v) त्रिभुज की तीनों भुजाओ को क्रम में लेने पर उनका सदिश योग .... है।

Ans. $\vec{0}$

(vi) दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते है यदि उनके ... . है।

Ans. परिणाम एवं दिशा समान

(vii) यदि $\theta=\frac{\pi}{2}$ हो, तो $\overline{AB}$ पर प्रक्षेप सदिश .... होगा।

Ans. शून्य सदिश।

13. सदिश $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के दिक् अनुपात लीखिए और इसकी सहायता से दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

Ans. सदिश $\vec{r}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ तब a,b,c सदिश $\vec{r}$ के दिक्–अनुपात होते है अतः $a=1,b=1,c=-2$

यदि l,m,n दिए हुए सदिश के दिक्–कोसाइन है तो

$$l=\frac{a}{|\vec{r}|}=\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \left(\because |\vec{r}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}\right)$$

$$m=\frac{b}{|\vec{r}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n=\frac{c}{|\vec{r}|}=\frac{-2}{\sqrt{6}}$$

अतः दिक्–कोसाइन $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ है।

14. दो सदिशों $\vec{a}$ और के $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए। यदि इनके परिमाण समान है और इनके बीच का कोण 60° है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

Ans. प्रश्नानुसार,

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$

तथा $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}$

$\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण $\theta=60^\circ$

माना $|\vec{a}|=|\vec{b}|=k$

अब $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{1}{2}}{k.k}=\frac{1}{2k^2}$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2k^2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2k^2}$$

$k^2=1 \quad k=\pm1$

परन्तु $k=|\vec{a}|=|\vec{b}|$

$\therefore k=1=|\vec{a}|=|\vec{b}|$

अतः $|\vec{a}|=1$

तथा $|\vec{b}|=1$

15. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी सलंग्न भुजाएं $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा दी गई है।

Ans. किसी समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएं $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है तो उसका क्षेत्रफल $|\vec{a}\times\vec{b}|$ द्वारा प्राप्त होता है।

तो $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\3&1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}=5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{25+1+16}=\sqrt{42}$$

16. यदि $\vec{a}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ तो $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

Ans. $\vec{a}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$

$\vec{b}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$

तो $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\1&-7&1\\3&-2&2\end{vmatrix}$

$$=(-14+14)\hat{i}-(2-21)\hat{j}+(-2+21)\hat{k}$$

$$=0\hat{i}+19\hat{j}+19\hat{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=|19\hat{i}+19\hat{k}|$$

$= \sqrt{(19)^2 + (19)^2}$

$= \sqrt{361+361}$

$= \sqrt{722}$

$= 19\sqrt{2}$

17. सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ के परिणामी के समान्तर एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई है।

Ans. माना $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का परिणामी $\vec{c}$ है।

तब $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$= 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} + (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$= 3\hat{i} + \hat{j}$

$\therefore \vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $= \frac{1}{|\vec{c}|}(\vec{c}) = \hat{c}$

$\hat{c} = \frac{3\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{j}$

अतः $\vec{c}$ के अनुदशि वह सदिश जिसका परिमाण 5 इकाई हो

$= 5\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{j}\right)$

$= \frac{15}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{10}}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\hat{j}$

$= \sqrt{10}\frac{3}{2}\hat{i} + \frac{5}{10}\sqrt{10}\hat{j}$

$= \sqrt{10}\frac{3}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\sqrt{10}\hat{j}$

18. दर्शाइये कि ox, oy, oz अक्षों के साथ बराबर झुके हुये सदिश की दिक्–कोसाइन कोज्याएं $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

Ans. माना एक सदिश $\overrightarrow{OP}, ox, oy$ तथा oz के साथ बराबर कोण α बनाता है तो

$\overrightarrow{OP}$ की दिक् कोज्याऐं $= \cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$[\because l^2 + m^2 + n^2 = 1]$

$= \cos^2\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः $\overrightarrow{OP}$ की दिक्–कोसाइन $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

19. बिन्दुओं A(1, 2, 2) और B(2, 3, 1) को मिलाने वाला सदिश $\overrightarrow{AB}$ क्या होगा।

Ans. A(1, 2, 2) और B(2, 3, 1)

$\overrightarrow{AB} = (2-1)\hat{i} + (3-2)\hat{j} + (1-2)\hat{k}$

$[\because \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$

$\overrightarrow{AB} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

20. यदि एक त्रिभुज की दो भुजायें सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ से निरूपित हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Ans. माना $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ $\qquad \vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2+4)\hat{i} - (1-6)\hat{j} + (-2-6)\hat{k}$

$= 6\hat{i} + 5\hat{j} - 8\hat{k}$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{36+25+64}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{125}$

$= \frac{1}{2} \times 5\sqrt{5}$ वर्ग इकाई

21. a और b के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $5\hat{i} + 7\hat{j}$ और $a\hat{i} + b\hat{j}$ समान हो –

Ans. $5\hat{i} + 7\hat{j}$ और $a\hat{i} + b\hat{j}$ समान है

अतः a = 5 व b \ 7

22. यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है और $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 8$ तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए –

Ans. $\because \vec{a}$ एक मात्रक सदिश है अतः $|\vec{a}| = 1$

$(\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 8$

$\vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{x} - \vec{a} \cdot \vec{a} = 8$

$|\vec{x}|^2 - 1 = 8$

$|\vec{x}|^2 = 8 + 1$

$|\vec{x}|^2 = 9$

$|\vec{x}| = 3$

अध्याय – 11
त्रि–विमीय ज्यामिति

अंकभार (1 + 1 + 3 + 4 = 9)

1. यदि दो रेखाओं के दिकअनुपात a_1,b_1,c_1 तथा a_2,b_2,c_2 है तो वे परस्पर लम्बवत होगी, यदि–

(1) $a_1b_2+a_2b_1+c_1c_2=0$ (2) $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$

(3) $a_2^2+b_2^2+c_2^2=1$ (4) $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

Ans. 4

2. यदि एक रेखा x, y और z अक्ष के साथ क्रमशः $90^o, 135^o, 45^o$ कोण बनाती है तो इसकी दिक्कोसाइन होगी–

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0$ (2) $0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0$ (4) $0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$

Ans. 2

3. x-अक्ष के समान्तर तथा मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण होगा–

(1) $\vec{r}=\lambda\hat{j}$ (2) $\vec{r}=\lambda(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

(3) $\vec{r}=\lambda\hat{i}$ (4) $\vec{r}=\lambda(\hat{j}+\hat{k})$

Ans. 3

4. x-अक्ष की दिक्–कोसाइन होंगे –

(1) 1, 0, 0 (2) 0, 0, 1

(3) 0, 1, 1 (4) 0, 0, 0

Ans. (1)

5. निम्न में से कौनसा समुह एक रेखा की दिक्कोज्याएँ नहीं है?

(1) (0, -1, 0) (2) (-1, 0, 0)

(3) (1, 1, 1) (4) 0, 0, -1

Ans. (3)

6. यदि एक रेखा x अक्ष व y अक्ष से $\frac{\pi}{4}$ का कोण बनाती है तो उस रेखा व z अक्ष के बीच कोण होगा।

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{4}$

(3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{3}$

7. बिन्दु (x, y, z) की z-अक्ष से लम्बवत् दूरी है –

(1) $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (2) $\sqrt{x^2+y^2}$

(3) 1 (4) Y

Ans. (2)

8. यदि दो रेखाओं के दिकअनुपात a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 है तो वे परस्पर लम्बवत् होगी यदि –

(1) $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ (2) $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$

(3) $a_1b_2+a_2b_1+c_1c_2=0$ (4) $a_2^2+b_2^2+c_2^2=1$

Ans. (1)

9. दर्शाइए कि बन्दु (2, 3, 4), (-1, -2, 1), (5, 8, 7) संरेख है–

Ans. माना दिये गये बिन्दु A(2, 3, 4), B(-1, -2,1) तथा C(5, 8, 7) है:

$$\therefore AB=\sqrt{(-1-2)^2+(-2-3)^2+(1-4)^2}$$
$$=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{3+25+9}=\sqrt{43}$$
$$BC=\sqrt{(5+1)^2+(8+2)+(7-1)^2}$$
$$=\sqrt{(6)^2+(10)^2+(6)^2}$$
$$=\sqrt{36+100+36}=2\sqrt{43}$$
$$AC=\sqrt{(2-5)^2+(3-3)^2+(4-7)^2}$$
$$=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{9+25+9}=\sqrt{43}$$
$$\therefore AC+AB=\sqrt{43}+\sqrt{43}=2\sqrt{43}=BC$$

अतः बिन्दु A, B तथा C संरेख है।

10. बिन्दु $(5,2,-4)$ से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i}+2\hat{i}-8\hat{k}$ के समांतर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. हमे ज्ञात है कि–

$\vec{a}=5\hat{i}+2\hat{i}-4\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{i}-8\hat{k}$

इसलिए, रेखा का सदिश समीकरण है–

https://t.me/ShekhawatiMission100

$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{i} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$

11. दिए गए रेखा युग्म

$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

और $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

Ans. मान लीजिए

माना रेखाओं के बीच कोण θ हो तो

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1.\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

$$\cos\theta = \left|\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$\cos\theta = \left|\frac{3+4+12}{3\times7}\right| = \frac{19}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

12. बिन्दु (1,2,3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के समान्तर है।

Ans. स्थिति बिन्दु $A(\vec{a})$ से गुजरने वाली रेखा AP तथा सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा का समीकरण

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

यहां पर $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

और $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

अभीष्ट रेखा AP का समीकरण

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

13. निम्न रेखा युग्म के बीच कोण ज्ञात कीजिए।

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \text{ और } \frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{8}$$

Ans. रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ के दिक् अनुपात 2, 2, 1 है तथा रेखा $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$ के दिक् अनुपात 4, 1, 8 है।

$\therefore a_1 = 2, b_1 = 2, c_1 = 1$

$a_2 = 3, b_2 = c_2 = 8$

यदि दो रेखाओं के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$= \frac{2\times4+2\times1+1\times8}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{4^2+1^2+8^2}}$$

$$= \frac{8+2+8}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{16+1+64}} = \frac{18}{\sqrt{9}\sqrt{81}} = \frac{18}{3\times9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

14. रेखा युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए–

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3} \text{ तथा } \frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$$

Ans. दी गई रेखाओं के दिक्अनुपात–

$a_1 = 2, b_1 = 5, c_1 = -3$

$a_2 = -1, b_2 = 8, c_2 = 4$

दोनों रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो –

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{2\times(-1)+5\times8+(-3)\times4}{\sqrt{4+25+9}\sqrt{1+64+16}}\right|$$

$$= \left|\frac{-2+40-12}{\sqrt{38}\sqrt{81}}\right|$$

$$= \frac{26}{9\sqrt{38}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$$

15. बिन्दुओं (-1, 0, 2) और (3, 4, 6) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए –

Sol. बिन्दु (A) (-1, 0, 2) का स्थिति सदिश – $\vec{a} = (-\hat{i} + 2\hat{k})$

बिन्दु (B) (3, 4, 6) का स्थिति सदिश – $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

अतः $\vec{b} - \vec{a} = (3-(-1)\hat{i}) + (4-0)\hat{j} + (6-2)\hat{k}$

$= 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

अतः रेखा का सदिश समीकरण $\vec{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$

16. रेखायुग्म $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{5}$ व $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ के मध्य कौन ज्ञात कीजिए –

Sol. $\because$ पहली रेखा के दिक्अनुपात = 3, 5, 4

दूसरी रेखा के दिक् अनुपात = 1, 1, 2

अतः $\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$

$$\cos\theta = \left|\frac{3\cdot1 + 5\cdot1 + 4\cdot2}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}\right|$$

$$\cos\theta = \left|\frac{16}{\sqrt{6}}\right| = \frac{16}{5\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

$$\cos\theta = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$$

17. उन रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए जिसके दिक् अनुपात a, b, c और (b - c), (c - a), (a - b) है।

Sol. $$\cos\theta = \frac{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{ab - ac + bc - ab + ac - bc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2}}$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = \cos^{-1}(0)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

18. रेखाएँ, जिनके अदिश समीकरण निम्न है के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए –

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

और $\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

Sol. $\vec{r}_0 = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ से तुलना करने पर

$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \quad \vec{b}_1 = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$\vec{a}_2 = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}, \quad \vec{b}_2 = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

रेखाओ के बीच न्यूनतम दूरी $d = \left|\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$

अतः $\vec{a}_2 - \vec{a}_2 = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= (4-1)\hat{i} + (5-2)\hat{j} + (6-3)\hat{k}$

$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

व $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (-3-6)\hat{i} - (1-4)\hat{j} + (3+6)\hat{k}$

$= -9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$

अतः $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{(-9)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{81 + 9 + 81}$

$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$

$$\therefore d = \left|\frac{(3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k})\cdot(-9\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k})}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$d = \left|\frac{3(-9) + 3\times3 + 3\times9}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$d = \left|\frac{-27 + 9 + 27}{9\sqrt{19}}\right|$$

$$d = \frac{9}{3\sqrt{19}} = \frac{9}{\sqrt{19}}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{19}}$$

https://t.me/ShekhawatiMission100

अध्याय – 12
रैखिक प्रोग्रामन

अंकभार (4)

1. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = 5x + 3y$ का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए

$5x + 2y \leq 10, 3x + 5y \leq 15, x \geq 0, y \geq 0$

हल :– दिए व्यवरोध

$5x + 2y \leq 10$ ———————— व्यवरोध (1)

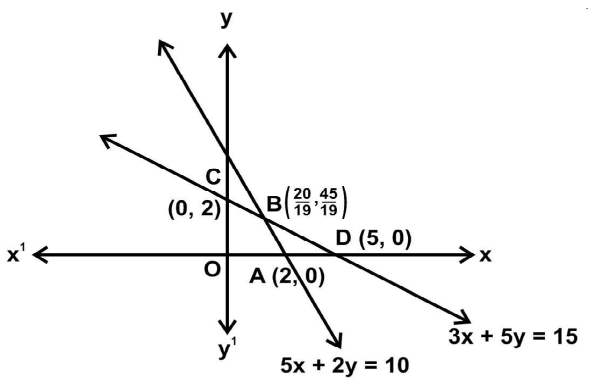
$3x + 5y \leq 15$ ————————व्यवरोध (2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ———————— व्यवरोध (3)

व्यवरोध (1) से समीकरण $5x + 2y = 10$ या $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ तथा मूल बिन्दु (0, 0) $0 < 10$ संतुष्ट करता है।

व्यवरोध (2) से समीकरण $3x + 5y = 15$ या $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ तथा मूल बिन्दु (0, 0), $0 < 15$ संतुष्ट करता है।

व्यवरोध (1), (2) व (3) के आलेखों से परिबद्ध क्षेत्र OABC सुसंगत क्षेत्र है।



कोणीय बिन्दुओं के संगत Z के मान

A (2, 0) तब $Z = 5(2) + 3(0) = 10$

$B\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ तब $Z = 5 \times \frac{20}{19} + 3 \times \frac{45}{19} = \frac{235}{19}$ ——— अधिकतम

$C(0,2)$ तब $Z = 5(0) + 3(2) = 6$

अतः– बिन्दु $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ पर Z का अधिकतम मान $\frac{235}{19}$ प्राप्त होता है।

2. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 5y$ का आलेखीय विधि से न्यूनत्तमीकरण कीजिए–

$x + 3y \geq 3, \ x + y \geq 2, \ x, y \geq 0$

हलः– दिए व्यवरोध $x + 3y \geq 3$ ——— व्यवरोध (1)

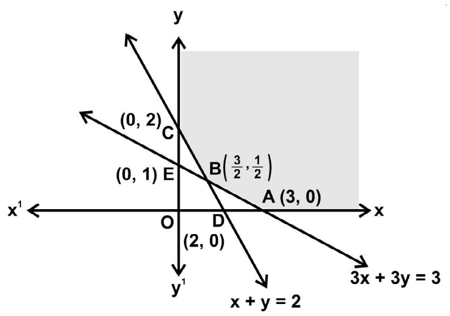
$x + y \geq 2$ ———— व्यवरोध (2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ———— व्यवरोध (3)

व्यवरोध (1) से समीकरण $x + 3y = 3$ या $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1$ तथा मूल बिन्दु (0, 0), $0 > 3$ संतुष्ट नहीं करता है।

व्यवरोध (2) से समीकरण $x + y = 2$ या $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ तथा मूल बिन्दु $(0,0)$ $0 > 2$ संतुष्ट नहीं करता है।

व्यवरोध (1), (2) व (3) के आलेखों से अपरिबद्ध क्षेत्र अर्थात् सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) दिखाया गया है।



कोणीय बिन्दुओं के संगत Z के मान

A (3, 0) तब $Z = 3(3) + 5(0) = 9$

$B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ तब $Z = 3\left(\frac{3}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{2} = 7$ ———— न्यूनतम

$C(0,2)$ तब $Z = 3(0) + 5(2) = 10$

अतः– बिन्दु $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ पर Z का न्यूनतम मान 7 प्राप्त होता है।

3. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 9y$ का रैखिक प्रोग्रामन के ग्राफीय विधि द्वारा न्यूनतमीकरण व अधिकतमीकरण कीजिए–

https://t.me/ShekhawatiMission100

$x + 3y \le +60$

$x + y \ge 10$

$x \le y$

$x \ge 0, \; y \ge 0$

हल :— दिए व्यवरोध

$x + 3y \le +60$ ——— व्यवरोध (1)

$x + y \ge 10$ ——— व्यवरोध (2)

$x \le y$ या $x - y \le 0$ ——— व्यवरोध (3)

$x \ge 0, y \ge 0$ ——— व्यवरोध (4)

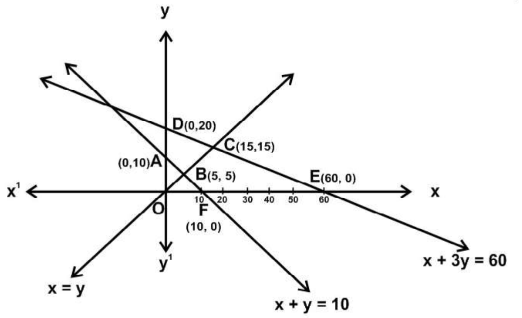
व्यवरोध (1) से समीकरण $x + 3y = 60$ या $\frac{x}{60} + \frac{y}{20} = 1$

व्यवरोध (2) से समीकरण $x + y = 10$ या $\frac{x}{10} + \frac{y}{10} = 1$

तथा मूल बिन्दु (0, 0) असमिका $x + y > 10, 0 > 10$ को संतुष्ट नहीं करता है।

व्यवरोध (3) से समीकरण $x = y$ तथा बिन्दु (1, 0), असमिका $x - y < 0, \; 1 < 0$ को संतुष्ट नहीं करता है।

असमिका (व्यवरोध) 1, 2, 3, व 4 के आलेखों से परिबद्ध क्षेत्र ABCD सुसंगत क्षेत्र है।



कोणीय बिन्दुओं के संगत Z के मान—

A(0, 10) पर $Z = 3(0) + 9\,(10) = 90$

B (5, 5) पर $Z = 3(5) + 9(5) = 60$ ——— न्यूनतम

C (15, 15) पर $Z = 3\,(15) + 9\,(15) = 180$ ——अधिकतम

D (0, 20) पर $Z = 3\,(0) + 9\,(20) = 180$ ——— अधिकतम

अतः— सुसंगत क्षेत्र बिन्दु B (5, 5) पर Z का न्यूनतम मान 60 है। तथा अधिकतम मान 180 दो बिन्दुओं C (15, 15) व D (0, 20) है। व CD पर स्थित प्रत्येक बिन्दु पर भी अधिकतम मान 180 है।

अध्याय – 13
प्रायिकता

अंकभार (1 + 1 + 2 + 3 = 7)

1. एक लीप वर्ष में 53 मंगलवार आने की प्रायिकता है –
(1) 1/7 (2) 2/7
(3) 3/7 (4) 0

2. यदि A और B दो घटनाएं इस प्रकार है कि $P(A|B) = P(B|A) \neq 0$ तब
(1) $A \subset B$ (2) $A = B$
(3) $A \cap B = \phi$ (4) $P(A) = P(B)$

3. $P(B) = 0.5,\ P(A \cap B) = 0.32$ तो $P\left(\frac{A}{B}\right) = ?$
(1) $\frac{16}{25}$ (2) $\frac{32}{25}$ (3) $\frac{5}{32}$ (4) $\frac{25}{32}$

4. दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते है, यदि
(1) A और B परस्पर अपवर्जी है
(2) P(A'B') = [1-P(A)][1-P(B)]
(3) P(A) = P(B)
(4) P(A) + P(B) = 1

5. A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित प्रदर्शित हुआ। वास्तविक रूप में चित प्रकट होने की प्रायिकता है–
(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{2}{5}$

6. यदि A और B ऐसी घटनाएं है कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$ तो निम्न में से कौन ठीक है–
(1) $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (2) $P(A|B) < P(A)$
(3) $P(A|B) \geq P(A)$ (4) इनमें से कोई नहीं

7. यदि A और B दो ऐसी घटनाएं है कि $P(A) \neq 0$ और $P(B|A) = 1$ है, तो
(1) $A \subset B$ (2) $B \subset A$
(3) $B = \phi$ (4) $A = \phi$

8. यदि $P(A|B) > P(A)$, तब निम्न में से कौन सही है।
(1) $P(A|B) < P(B)$ (2) $P(A \cap B) < P(A).P(B)$
(3) $P(B|A) > P(B)$ (4) $P(B|A) = P(B)$

9. यदि A और B ऐसी दो घटनाएं है कि– $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$, तब
(1) P(B|A) = 1 (2) P(A|B)=1
(3) P(B|A)=0 (4) P(A|B)=0

10. यदि $P(E) = 0.35$ और $P(E \cup F) = 0.6$ है तथा E एवं F स्वतंत्र घटनाएं है तब P(F) का मान है?
(1) $\frac{5}{13}$ (2) $\frac{7}{13}$
(3) $\frac{9}{13}$ (4) $\frac{11}{13}$

11. यदि $P(A) = \frac{3}{5}$ एवं $P(B) = \frac{1}{5}$ तथा A एवं B परस्पर अपवर्जी घटनाएं है तो $P(A \cup B)$ का मान है:–
(1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$
(3) $\frac{4}{5}$ (4) $\frac{3}{25}$

12. यदि $P(A) = 0.8$ और $P(B) = 0.5$ तो $P(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $P(B|A)$ का मान 0.4 हो।
(1) 0.20 (2) 0.40
(3) 0.32 (4) 0.36

13. निश्चित घटना की प्रायिकता होती है?
(1) 0 (2) 1
(3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{3}$

-: Answer :-

1-2, 2-4, 3-1, 4-2, 5-1, 6-3, 7-1, 8-3, 9-2, 10-1, 11-3, 12-3, 13-2

भाग–ब

14. एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए –

Sol. माना E = संख्या 4 का न्यूनतम एक बार आना

F = संख्याओं का योग 6 होना।

E = {(4, 1), (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6) (1, 4) (2, 4) (3, 4) (5, 4) (6, 4)}

F = {(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)}

$E \cap F$ = {(2, 4) (4, 2)}

कुल परिणाम = $6 \times 6 = 36$

$P(F) = \frac{5}{36}, \quad P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

अतः $P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$

15. यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{12}$ एवं $P(B/A) = \frac{1}{5}$ है तो $P(A \cup B) = ...$ होगा।

हलः– प्रश्नानुसार $2P(A) = P(B) = \frac{5}{12}$

अतः– $2P(A) = \frac{5}{12} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{24}$

$P(B) = \frac{5}{12}$

एवं $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{5}$

$= P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

$= \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{24}$

अतः– $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{5}{24} + \frac{5}{12} - \frac{1}{24}$

$= \frac{5 + 10 - 1}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

अतः– $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$ होगा।

16. यदि $P(A) = \frac{1}{2}$ एवं $P(B) = \frac{3}{4}$ तथा A तथा B स्वतंत्र घटनाएं है तो P(A नहीं और B नहीं) का मान .... होगा।

हलः– $\therefore P(A) = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore P(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

= A एवं B स्वतंत्र घटनाएं है अतः A' एवं B' भी स्वतंत्र घटनाएं होगी।

अतः– $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$

$P(A' \cap B')) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

$P(A' \cap B') = \frac{1}{8}$

17. एक परिवार में दो बच्चे है। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है?

Ans. माना कि b लड़का एवं g लड़की को निरूपित करते है। तो परीक्षण का प्रतिदर्श सभष्टि है–

S = {(b, b), (b, g), (g, b), (g,g)}

माना कि E एवं F क्रमशः निम्न घटनाओं को दर्शाते है–

E : दोनों बच्चे लड़के है।

F : बच्चों में से कम से कम एक लड़का है।

तब E = {(b,b)}, F = {(b, b), (g, b), (b, g)}

अब $E \cap F = \{(b,b)\}$

अतः $P(F) = \frac{3}{4}$ एवं $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

इसलिए $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

18. यदि दिया गया है कि दोनों पासों को फैंकने पर प्राप्त संख्याएं भिन्न–भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans. दो पासों को उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि $S = 6\times 6 = 36$

माना कि घटना A = दो संख्याओं का योग 4 है।

$A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$

अतः $n(A) = 3$

दो पासों की उछाल में समान संख्या वाले परिणाम

$= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

घटना B = पासों पर उछाल पर भिन्न–भिन्न अंक प्राप्त होगा

$= 36 - 6 = 30$

$n|B| = 30$

$A\cap B = \{(1,3),(3,1)\}$

तब $n(A\cap B) = 2$, $P(A\cap B) = \frac{2}{36}$

$P(A) = \frac{3}{36}, P(B) = \frac{30}{36}$

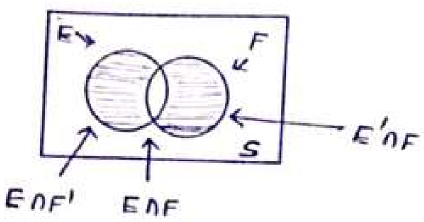
अतः $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

119. सिद्ध कीजिए कि यदि E और F दो स्वतंत्र घटनाएं है तो E और F' भी स्वतंत्र होगी।

Ans. क्योंकि E एवं F स्वतंत्र घटनाएं है इसलिए

$P(E\cap F) = P(E).P(F)$ 1

उपरोक्त वेन आरेख से स्पष्ट है कि $(E\cap F)$ तथा $(E\cap F')$ परस्पर अपवर्जी घटनाऐं है।



साथ ही $E = (E\cap F)\cup(E\cap F')$

अतः $P(E) = P(E\cap F) + P(E\cap F')$

$P(E\cap F') = P(E) - P(E).P(F)$ (समीकरण 1 से)

$P(E\cap F') = P(E)[1 - P(F')]$

$P(E\cap F') = P(E).P(F')$

अतः E और F' स्वतंत्र घटनाएं है।

20. मान ले E तथा F दो इस प्रकार की घटनाएं है कि $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ एवं $P(E\cap F) = \frac{1}{5}$ तब क्या E एवं F स्वतंत्र है।

हलः– दिया गया है कि $P(E) = \frac{3}{5}$

तथा $P(F) = \frac{3}{10}$

चुकिं $P(E)\times P(F) = \frac{3}{5}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{50}$

तथा $P(E\cap F) = \frac{1}{5}$

$= P(E\cap P) \neq P(E)\cdot P(F)$

अतः E तथा F स्वतंत्र नहीं है।

21. एक पासे को एक बार उछाला जाता है घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्व्य है' को E से और पासे पर प्राप्त संख्या सम है को F से निरूपित किया जाए तो बताएं क्या घटनाएं E एव F स्वतन्त्र हैं

हलः– हम जानते है कि इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है :

$S = \{1,,2,3,4,5,6\}$

अब $E = \{3,6\}$, $F = \{2,4,6\}$ एवं $E\cap F = \{6\}$

तब $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ एवं $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ तथा $P(E\cap F) = \frac{1}{6}$

स्पष्टता $P(E\cap F) = P(E)\cdot P(F)$

अतः E तथा F स्वतंत्र घटनाएं है।

भाग–स

22. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंट गई गड्डी में से एक के बाद एक तीन पते बिना प्रतिस्थापित किए निकाले गए। पहले दो पत्तों का बादशाह और तीसरे का इक्का होने की क्या प्रायिकता है?

Ans. मान लें कि K घटना निकाला गया पता बादशाह है को और A घटना निकाला गया पता इक्का है को व्यक्त करते हैं। स्वष्टतया हमें P(KKA) ज्ञात करना है।

अब $P(K)=\frac{4}{52}$

साथ ही $P(K|K)$ यह ज्ञात होने पर कि पहले निकाला गया पता बादशाह है पर दूसरे पते का बादशाह होने की प्रायिकता को दर्शाता है। अब गड्डी में $(52-1)=51$ पत्ते है जिनमें तीन बादशाह है

इसलिए $P(K|K)=\frac{3}{51}$

अंततः $P(A|KK)$ तीसरे निकाले गए पते का इक्का होने की सप्रतिबंध प्रायिकता है जब कि हमें ज्ञात है कि दो बादशाह पहले ही निकाले जा चुके हैं। अब गड्डी में 50 पत्ते रह गए हैं

इसलिए $P(A|KK)=P(A|KK)=\frac{4}{50}$

प्रायिकता के गुणन नियम द्वारा हमें प्राप्त होता है कि

$P(KKA)=P(K)P(K|K)P(A|KK)$

$$=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}\times\frac{4}{50}=\frac{2}{5525}$$

23. तीन अभिन्न डिब्बे I, II और III दिए गए हैं जहां प्रत्येक में दो सिक्के हैं। डिब्बे I में दोनों सिक्के सोने के है, डिब्बे II में दोनों सिक्के चांदी के हैं और डिब्बे III में एक सोने और एक चांदी का सिक्का है। एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से यादृच्छया एक सिक्का निकालता है। यदि सिक्का सोने का है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का ही है?

Ans. मान ले E_1, E_2 और E_3 क्रमशः डिब्बे I, II और III के चयन को निरूपित करते है

तब $P(E_1)=P(E_2)=P(E_3)=\frac{1}{3}$

साथ ही मान लें A घटना 'निकाला गया सिक्का सोने का है' को दर्शाता है।

तब $P(A|E_1)$ = P (डिब्बे I से सोने का सिक्का निकलना)

$$=\frac{2}{2}=1$$

$P(A|E_2)$ = P (डिब्बे II से सोने का एक सिक्का निकलना) = 0

$P(A|E_3)$ = P (डिब्बे III से सोने का सिक्का निकलना) = $\frac{1}{2}$

अब डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का होने की प्रायिकता = निकाला गया सोने का सिक्का डिब्बे I से होने की प्रायिकता = $P(E_1|A)$

अब बेज–प्रमेय द्वारा

$$P(E_1|A)=\frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

24. एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इस की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

Ans. मान लीजिए कि E व्यक्ति द्वारा पासे को उछाल कर यह बताने की कि उस पर आने वाली संख्या 6 है की घटना है। मान लीजिए कि S_1 पासे पर संख्या 6 नहीं आने की घटना हैं। तब

$P(S_1)$ = संख्या 6 आने की घटना की प्रायिकता $=\frac{1}{6}$

$P(E|S_1)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे कि संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है, की प्रायिकता

= व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $=\frac{3}{4}$

$P(E|S_2)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे पर संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 नहीं है, की प्रायिकता

= व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

अब बेज प्रमेय द्वारा

$P(S_1|E)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने की प्रायिकता कि संख्या 6 प्रकट हुई है, जब वास्तव में संख्या 6 है।

$$=\frac{P(S_1)P(E|S_1)}{P(S_1)P(E|S_1)+P(S_2)P(E|S_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}\times\frac{25}{8}=\frac{3}{8}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।

25. एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से,

https://t.me/ShekhawatiMission100

समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि –

(i) समस्या हल हो जाती है।

(ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

Ans. A और B द्वारा समस्या हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ और न हल करने की प्रायिकता क्रमशः $1-\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{2}$ और $1-\frac{1}{3}$ या $\frac{2}{3}$ है।

(i) समस्या हल न होने की प्रायिकता $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ दोनों की समस्या हल होने की प्रायिकता $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(ii) यदि समस्या के हल होने को S और न हल होने को F निरूपित करें तो तथ्यतः उस समस्या को हल SF + FS ढंग से हल किया जाएगा।

इसकी प्रायिकता $=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

26. थैले 1 में 3 लाल तथा 4 काली गेंदे हैं तथा थैला 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदे हैं। एक गेंद को थैला 1 से थैला 2 में स्थानान्तरित किया जाता है और तब एक गेंद थैले 2 से निकाली जाती है। निकाली गई गेंद लाल रंग की है। स्थानान्तरित गेंद की काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans. थैले 1 में 3 लाल और 4 काली गेंदे है।

तथा थैले 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदें है।

मान लीजिए घटना E_1 तथा E_2 थैले 1 से लाल गेंद और काली गेंद निकालने की हों, तब

$$\therefore \quad P(E_1)=\frac{3}{7}, P(E_2)=\frac{4}{7}$$

घटना A : लाल रंग की गेंद निकालना

एक लाल गेंद थैले 1 से निकाल कर 2 में रख दी गई। इस प्रकार थैले 2 में 5 लाल और 5 काली गेंदें हो गई।

$$\therefore \quad P(A/E_1)=\frac{5}{10}$$

एक काली गेंद थैले 1 से निकालकर थैला 2 में रख दी। इस प्रकार दूसरे थैले में 4 लाल और 6 काली गेंदे हैं।

$$\therefore \quad P(A/E_2)=\frac{4}{10}$$

बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A)=\frac{P(E_2)P(A/E_2)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{4}{10}}{\frac{3}{7}\times\frac{5}{10}+\frac{4}{7}\times\frac{4}{10}}=\frac{16}{15+16} \qquad =\frac{16}{31}$$

https://t.me/ShekhawatiMission100

शेखावाटी मिशन मॉडल पेपर 1

विषयः गणित (Mathematics)

कक्षा – 12

समय : 3 घण्टे 15 मिनट पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

GENERAL INSTRUCTION TO THE EXAMINEES :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
   Candidate must write first his/her Roll No. on the question paper compulsorily.
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।
   All the question are compulsory.
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
   Write the answer to each question in the given answer book only.
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
   For questions having more than one part, the answers to those parts are to be written together in continuity.
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
   Write down the serial number of the question before attempting it.
6. प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तरण में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
   If there is any error/differencc/Contradiction in Hindi & English versions of thc question paper, the question of Hindi version should be treated valid.
7. प्रश्न क्रमांक 14 से 20 में आन्तरिक विकल्प है।
   There are internal choices in Question No. 14 to 20,

खण्ड – अ

1. बहुविकल्पी प्रश्न (i से xviii) (प्रत्येक प्रश्न – 1 अंक) $1 \times 18 = 18$
   Multiple Choice Questions (i to xviii) (Each question 1 mark) (1x18 = 18)

(i). यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधी की संख्या है –
If $A = \{1, 2, 3\}$, then the number of equivalence relations containing the element (1, 2) is -
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(ii) $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ बराबर है – $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ is equal to -
(1) π (2) $-\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{2\pi}{3}$

(iii) 3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कूल संख्या कितनी होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है?
What is the total number of 3 x 3 matrices whose each entry is 0 or 1?
(1) 27 (2) 18 (3) 81 (4) 512

(iv) यदि n कोटि का एक वर्ग आव्यूह A हो तो |adj (A)| होगा –
If A is a square matrix of order n, then | adj (A) | is equal to -
(1) $|A|$ (2) $|A|^n$ (3) $|A|^{n+1}$ (4) $|A|^{n-1}$

(v) यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है – If $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ then x is equal to -

(1) 6 (2) -6 (3) ± 6 (4) 0

(vi) यदि $y = \cos\left(\sqrt{x}\right)$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा – If $y = \cos\left(\sqrt{x}\right)$, then the value of $\frac{dy}{dx}$ is -

(1) $-\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$ (2) $-\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$ (3) $\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$ (4) $\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

(vii) निम्नलिखित में कौनसे फलन $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रसमान है? Which of the following functions is decreasing in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$?

(1) cos x (2) sin x (3) cos 3x (4) tan x

(viii) यदि $F(x) = \begin{cases} kx + 1 : & x \le 5 \\ 3x - 5 : & x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 5$ पर संतत है, तो k का मान है :

If the function F(x) defined as $F(x) = \begin{cases} kx + 1 : & x \le 5 \\ 3x - 5 : & x > 5 \end{cases}$ is continuous at $x = 5$, then the value of k is:

(1) $-\frac{3}{5}$ (2) $-\frac{6}{5}$ (3) $-\frac{5}{3}$ (4) $\frac{9}{5}$

(ix) $\left[\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$ का प्रतिअवकलन है? What is the antiderivative of $\left[\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$?

(1) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{x} + c$ (2) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + c$

(3) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$ (4) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + c$

(x) वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ का x-अक्ष के ऊपर क्षेत्रफल है?
What is the area of the circle $x^2 + y^2 = 2$ above the x-axis?

(1) 2π (2) $\sqrt{2}\pi$ (3) 4π (4) π

(xi) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ की घात है –

The order of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ is -

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) परिभाषित नहीं है।

(xii) यदि दो सदिशों $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ के बीच का कोण θ है तो $\left|\bar{a} \cdot \bar{b}\right| = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$ जब θ बराबर हैं?

If θ is the angle between two vectors $\bar{a}$ and $\bar{b}$, then $\left|\bar{a} \cdot \bar{b}\right| = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$ when θ is equal to -

(1) 0 (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) π

(xiii) सदिश $\bar{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\bar{b} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ पर प्रक्षेप होगा –

The projection of the vector $\bar{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ on the vector $\bar{b} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ is -

(1) 19 (2) $19\sqrt{9}$ (3) $\frac{19}{\sqrt{9}}$ (4) $\frac{19}{9}$

(xiv) $\left[\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})\right]\times\left[\hat{j}\cdot(\hat{i}\times\hat{k})\right]+\hat{k}(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान है :

The value of $\left[\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})\right]\times\left[\hat{j}\cdot(\hat{i}\times\hat{k})\right]+\hat{k}(\hat{i}\times\hat{j})$ is:

(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) 3

(xv) दो परस्पर लम्बवत् रेखाओं के दिक्अनुपात 1, 2, 3 तथा 3, 2, λ का मान होगा –

The direction ratios of a line perpendicular to the lines with direction ratios 1, 2, 3 and 3, 2, λ will be:

(1) 7/3 (2) 5 (3) 5/3 (4) -7/3

(xvi) यदि $P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = 0$ तब $P\left(\frac{A}{B}\right)$ है –

If $P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = 0$, then $P\left(\frac{A}{B}\right)$ is:

(1) 0 (2) 1/2 (3) परिभाषित नहीं (4) 1

(xvii) दो पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर एक सम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी?

A pair of dice is thrown. What is the probability of getting an even prime number on each die?

(1) 0 (2) 1/3 (3) 1/12 (4) 1/36

(xviii) दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते हैं, यदि

Two events A and B are said to be independent if:

(1) A और B परस्पर अपवर्जी है। A and B are mutually exclusive. (2) P[A' B'] = [1 - P(A)] [1 - P(B)]

(2) P(A) = P (B) (4) P(A) + P(B) = 1

खण्ड – ब

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति करो – (अंक $1 \times 6 = 6$) Fill in the blanks (Marks 1x6 = 6)

(i) $\sin^{-1}\left[\sin\frac{3\pi}{5}\right]$ का मान .... है। The value of $\sin^{-1}\left[\sin\frac{3\pi}{5}\right]$ is ____________.

(ii) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ तो A' = ... | If the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, then A' = ____________.

(iii) $\int e^{2x+3} \cdot dx =$ ....|

(iv) अवकलन समीकरण $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ का समाकनल गुणांक .... है।

The integrating factor of the differential equation $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ is ___________.

(v) किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रूपयें में $R(x) = 4x^2 + 43x + 7$ है $x = 6$ तो सीमान्त आय.............. होगी।,

The marginal revenue of a product whose total revenue in Rupees $R(x) = 4x^2 + 43x + 7$ where $x = 6$ units sold is ____________.

(vi) $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश...................... है। The unit vector in the direction of $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ is ___________

3. अति लघुत्तरात्मक प्रश्न :– (अंक 1 × 12 = 12) Very Short Answer Questions (Marks 1x12 = 12)

(i) x तथा y का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x + y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है।

Find the values of x and y if $x + y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ and $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$ If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, then show that $|2A| = 4|A|$.

(iii) यदि $f(x) = -|x + 1| + 3$ तो $f(x)$ का अधिकतम मान है –

If $f(x) = -|x + 1| + 3$, then the maximum value of f(x) is __________.

(iv) दशाएँ कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक सतत् फलन है।

State the condition for the function defined by $f(x) = |\cos x|$ to be a continuous function.

(v) यदि $y = x \log_e x$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा। If $y = x \log_e x$, then the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ is __________.

(vi) एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 सेमी/सेकण्ड की दर से वृद्धि हो रही है, तब वृत्त की परिधि में परिवर्तन की दर होगी।

The radius of a circle is increasing at the rate of 0.7 cm/sec. Then the rate of change in the circumference of the circle will be __________.

(vii) $I = \int_0^{\pi} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx$ का मान है। The value of $I = \int_0^{\pi} \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx$ is __________.

(viii) वक्र $y = x^2$ तथा रेखा $y = 4$ के बीच का क्षेत्रफल है।

The area between the curve $y = x^2$ and the line $y = 4$ is __________.

(ix) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

Find the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

(x) यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार है कि $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ और $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ तो $|\vec{a} - \vec{b}|$ ज्ञात करो।

If two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are such that $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, then find $|\vec{a} - \vec{b}|$.

(xi) यदि $x\hat{i} + 2\hat{j} + (z-1)\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} + (y+2)\hat{j} + \hat{k}$ समान सदिश है तो X, Y, Z के मान है।

If $x\hat{i} + 2\hat{j} + (z-1)\hat{k}$ and $-2\hat{i} + (y+2)\hat{j} + \hat{k}$ are equal vectors, then find the values of X, Y, and Z.

(xii) A और B ऐसी घटनाएँ दी गई है जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = P$ एवं घटनाएँ परस्पर अपवर्जी है तो P का मान है।

A and B are two events such that $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ and $P(B) = P$. If the events are mutually exclusive, then find the value of P.

https://t.me/ShekhawatiMission100

खण्ड – ब

(प्रत्येक प्रश्न 2 अंक) (प्रश्न 4 से 13 तक)

(Each question 2 marks) (Questions 4 to 13)

4. सिद्ध कीजिए की $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \to R$, न तो एकैकी है और न अच्छादक है?

Prove that the function $f: R \to R$, defined by $f(x) = x^2$ is neither injective nor surjective.

5. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए –

Find the value of $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$.

6. समीकरण $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ से a, b, c, d का मान ज्ञात कीजिए।

Find the values of a, b, c, and d from the equation: $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$

7. यदि शीर्षो (-2, 0), (0, 4) एवं (0, k) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है तो k का मान है?

If the area of the triangle with vertices (-2, 0), (0, 4), and (0, k) is 4 square units, then find the value of k.

8. निम्नलिखित प्रश्न में k का मान ज्ञात कीजिए, ताकि प्रदत फलन निर्दिष्ट बिन्दू पर सतत् हो।

Find the value of k in the following question so that the given function is continuous at the specified point.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\cos x}{\pi - 2x}, & \text{यदि } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 3, & \text{यदि } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

9. $Y = \log(\cos e^x)$ $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $Y = \log(\cos e^x)$ $\frac{dy}{dx}$.

10. a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल (1, 2) में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन निरन्तर वर्धमान हैं।

Find the minimum value of a for which the function $f(x) = x^2 + ax + 1$ is increasing in the interval (1, 2).

11. $\int \frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos x - \cos a} dx$ ज्ञात कीजिए।

Evaluate the integral: $\int \frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos x - \cos a} dx$

12. वक्र $y^2 = x$ रेखाओं $x = 1, x = 4$ और x-अक्ष के बीच प्रथम चतुर्थाश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

Find the area of the region bounded by the curve $y^2 = x$, the lines $x = 1, x = 4$, and the x-axis in the first quadrant.

13. सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ है।

Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$, where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

https://t.me/ShekhawatiMission100

खण्ड – स

(प्रत्येक प्रश्न – 3 अंक) **(प्रश्न 14 से 17 तक)**

Section C (Each question 3 marks) (Questions 14 to 17)

14. $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। Evaluate the integral: $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx$

अथवा OR

$\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a - x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। Evaluate the integral: $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a - x}} dx$.

15. अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए। दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = 0$

अथवा OR

अवकल समीकरण $ye^{\frac{x}{y}} dx = \left(xe^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dy, \ (y \neq 0)$ का हल ज्ञात कीजिए।

Find the particular solution of the differential equation: $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ Given that $y = 0$ when $x = 0$.

Find the solution of the differential equation: $ye^{\frac{x}{y}} dx = \left(xe^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dy, \ (y \neq 0)$.

16. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-5}$ परस्पर लंब हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

If the lines $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-5}$ are perpendicular to each other, then find the value of k.

अथवा OR

रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the lines $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$.

17. एक बीमा कम्पनी 2000 स्कूटर चालको, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.01, 0.03 और 0.15 हैं। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या हैं? An insurance company insures 2000 scooter drivers, 4000 car drivers, and 6000 truck drivers. The probabilities of accidents are 0.01, 0.03, and 0.15, respectively. One of the insured persons meets with an accident. What is the probability that the person is a scooter driver?

अथवा OR

52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खोजा जाता है शेष पत्तों से दो पत्तें निकाले जाते हैं जो ईंट के पत्ते है खो गए पत्ते की ईंट होने की प्रायिकता क्या है?

A card is drawn from a pack of 52 cards. Two cards are drawn from the remaining cards, which are found to be hearts. What is the probability that the missing card is a heart?

https://t.me/ShekhawatiMission100

खण्ड – द

(प्रत्येक प्रश्न – 4 अंक) **(प्रश्न 18 से 20 तक)**

Section D (Each question 4 marks) (Questions 18 to 20)

18. मान ज्ञात करो – $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$ Evaluate: $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$

अथवा OR

$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}dx$ का मान ज्ञात करो। Evaluate: $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}dx$.

19. रेखाएँ, जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित है, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

$\vec{r} = (1 + t)i + (t - 2)j + (3 - 2t)k$ और $\vec{r} = (S + 1)i + (2S - 1)j - (2S + 1)k$

Find the shortest distance between the lines whose vector equations are given by: $\vec{r} = (1+t)i+(t-2)j+(3-2t)k$ and $\vec{r} = (S+1)i + (2S-1)j - (2S+1)k$

अथवा

दिये गये रेखा युग्म के मध्य कोण ज्ञात कीजिये – $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{4}$ और $\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2}$

Find the angle between the pair of lines: $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{4}$ OR $\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2}$

20. आलेख द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए – निम्न व्यारोधों के अंतर्गत

Solve the following linear programming problem graphically:

$$x + y \le 50$$
$$3x + y \le 90$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

$Z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

Maximize: $Z = 4x + y$ Subject to the constraints

अथवा OR

आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए – निम्न व्यवरोधा के अंतर्गत Solve the following linear programming problem graphically:

$$x + 2y \ge 10$$
$$3x + 4y \le 24$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

$z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

Minimize: $Z = 200x+500y$ Subject to the constraints:

https://t.me/ShekhawatiMission100

शेखावाटी मिशन मॉडल पेपर 2

विषयः गणित (Mathematics)

कक्षा – 12

समय : 3 घण्टे 15 मिनट पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

GENERAL INSTRUCTION TO THE EXAMINEES :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
   Candidate must write first his/her Roll No. on the question paper compulsorily.
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।
   All the question are compulsory.
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
   Write the answer to each question in the given answer book only.
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
   For questions having more than one part, the answers to those parts are to be written together in continuity.
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
   Write down the serial number of the question before attempting it.
6. प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तरण में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
   If there is any error/differencc/Contradiction in Hindi & English versions of thc question paper, the question of Hindi version should be treated valid.
7. प्रश्न क्रमांक 14 से 20 में आन्तरिक विकल्प है।
   There are internal choices in Question No. 14 to 20,

खण्ड – अ

1. बहुविकल्पी प्रश्न (i से xviii) (प्रत्येक प्रश्न – 1 अंक) $1 \times 18 = 18$

(i) यदि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ हो, तो सही उत्तर है।
If $f : R \to R$ is a function defined by $f(x) = 3x$, then the correct answer is:
(a) f एकैकी आच्छादक है। f is one one and onto
(2) f बहुएकी आच्छादक है। f is many one and onto
(c) सिर्फ एकैकी है। only one one
(4) न एकैकी और न आच्छादक neither one one nor onto

(ii) $\cos^{-1}\left[\cos\frac{7\pi}{6}\right]$ का मान होगा – The value of $\cos^{-1}\left[\cos\frac{7\pi}{6}\right]$ will be -
(1) $\frac{7\pi}{6}$ (2) $\frac{5\pi}{6}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

(iii) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो तो x - y का मान है – $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ then the value of x-y is -
(1) 5 (2) -5 (3) 3 (4) -3

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & x & 3 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है तो x का मान है? $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & x & 3 \end{bmatrix}$ is a symmetric matrix, then the value of x is?
(1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) -2

(v) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ का मान है। The value of $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ is -

(1) 12 (2) -12 (3) 18 (4) -18

(vi) $f(x) = \sin(x^2)$ का अवकलज ज्ञात करो। Find the derivative of $f(x) = \sin(x^2)$.

(1) $-2x \cos x^2$ (2) $2x \cos x$ (3) $2x \cos x^2$ (4) $-2x \cos x$

(vii) $x = a\cos\theta, \ y = b\sin\theta$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो – If $x = a\cos\theta, \ y = b\sin\theta$ then find $\frac{dy}{dx}$.

(1) $\frac{b}{a}\cot\theta$ (2) $\frac{b}{a}\tan\theta$ (3) $\frac{b}{a\cot\theta}$ (4) $\frac{a}{b\tan\theta}$

(viii) $f(x) = x^3 - 3x$ हो, तो फलन f का उच्चिष्ठ का बिन्दु है? If $f(x) = x^3 - 3x$, then the point of maximum of the function f is?

(1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) 2

(ix) रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{3}$ की दिक् कोसाइन है। The direction cosines of the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{3}$ are -

(1) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$ (2) $\frac{2}{14}, \frac{-1}{14}, \frac{3}{14}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$ (4) None

(x) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ के अनुदिश 3 ईकाई का सदिश है। The vector of 3 units in the direction of $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ is -

(1) $\frac{3}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j})$ (2) $\frac{3}{5}(\hat{i} - 2\hat{j})$ (3) $\frac{9}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j})$ (4) $\frac{9}{5}(\hat{i} - 2\hat{j})$

(xi) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ का परिमाण है – The magnitude of $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ is -

(1) 1/6 (2) 1 (3) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (4) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$

(xii) तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थिति स्वेच्छ अचरों की संख्या है –

The number of arbitrary constants present in the particular solution of a differential equation of order three is -

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

(xiii) समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश है? Two vectors with the same direction are?

(1) $\hat{i} + \hat{j}$ और $2\hat{i} - \hat{j}$ (2) $\hat{i} + \hat{j}$ और $\hat{i} - \hat{j}$ (3) $\hat{i}$ व $-\hat{i}$ (4) $\hat{i}$ व $2\hat{i}$

(xiv) $f(x) = 4x^3 - 6$ द्वारा परिभाषित फलन है तो f का प्रतिअवकलज ज्ञात करो यदि $f(0) = 3$

The function defined by $f(x) = 4x^3 - 6$ then find the antiderivative of f if (f(0)=3)

(1) $x^4 + 6x + 3$ (2) $x^4 - 6x + 3$ (3) (4)

(xv) $y = x\,|x|$ x-अक्ष एवं कोटियो $x = -1$ तथा $x = 1$ के बीच क्षेत्रफल है।

The area between the x-axis and the ordinates (x=-1) and (x=1) of (y=x | x |) is -

(1) 0 (2) 1/3 (3) 2/3 (4) 4/3

(xvi) एक पासे को 2 बार उछालने पर अंको का योग अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता है।

The probability of getting the sum of the numbers as a prime number when a die is rolled 2 times is -

(1) 15/36 (2) 17/36 (3) 14/36 (4) 16/36

https://t.me/ShekhawatiMission100

(xvii) यदि E और F स्वतन्त्र घटनाएँ है तो सत्य है। If E and F are independent events then it is true that -

(1) $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ (2) $P(E \cap F) = P(E)P(F)$

(3) $P(E \cap F) = P(E) + P(F)$ (4) $P(E \cap F) = P(E) - P(F)$

(xvii) यदि $P(A) = \frac{1}{3}$ हो तो $P(\bar{A})$ का मान है। If $P(A) = \frac{1}{3}$, then the value of $P(\bar{A})$ is -

(1) 1/3 (2) 2/3 (3) 1/4 (4) None

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति करो – (अंक 1 × 6 = 6) Fill in the blanks (Marks 1x6 = 6)

(i) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ का सरलतम रूप............. है। The simplest form of $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ is ....

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ हो तो adj (A) का मान = ... है। $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ then the value of adj(A) is ....

(iii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल .... है। The general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ is ....

(iv) यदि किसी फलन के लिए $f(x_1) \geq f(x_2)$ जहाँ $x_1\ x_2 \in R$ तब f (x) का .... फलन होगा। If for any function f, $f(x_1) \geq f(x_2)$ where $x_1\ x_2 \in R$ then f(x) is a .... function.

(v) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ तथा $\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$ हो, तो $\vec{b}$ का मान.................... हो सकता है। If $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$, then the value of b can be ....

(vi) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ का मान...................... है। The value of $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ is ....

3. अतिलघूतरात्मक प्रश्न : (अंक 1 × 12 = 12) Very Short Answer Questions (Marks 1x12 = 12)

(i) सिद्ध करो $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, $x = 0$ पर संतत नहीं है। Prove that the function $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, is not continuous at x = 0.

(ii) y + sin y = cos x हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो। If y + sin y = cos x, then find $\frac{dy}{dx}$.

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो 2A - B का मान ज्ञात करें। If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ then find the value of 2A - B.

(iv) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो, जिसके शीर्ष (3, 8) (-4, 2) (5, 1) है। Find the area of the triangle whose vertices are (3, 8), (-4, 2), (5, 1).

(v) बिन्दु P (2, 3, 0) तथा Q(-1, -2, -4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड $\overline{PQ}$ का दिष्ट सदिश ज्ञात करो। Find the directed vector of the line segment $\overline{PQ}$ joining the points P(2, 3, 0) and Q(-1, -2, -4).

(vi) फलन $f(x) = 2x^2 - 3x$ के लिए निरन्तर ह्रसमान फलन होने का अन्तराल ज्ञात करो। Find the interval for which the function f (x)

$= 2x^2 - 3x$ is a strictly decreasing function.

(vii) वृत्त के क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या के सापेक्ष ज्ञात करो यदि $r = 2cm$ हो। Find the rate of change of the area of a circle with respect to its radius if $r = 2$ cm.

(viii) फलन $y = a\cos x + b\sin x \quad \forall\ a,\ b \in R$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात करो। Find the differential equation for the function $y = a\cos x + b\sin x$, where $\forall\ a,\ b \in R$

(ix) x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात करो जो मूल बिन्दु से गुजरती है। Find the equation of the line parallel to the x-axis and passing through the origin.

(x) $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx$ का मान ज्ञात करो। Find the value of $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx$.

(xi) वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ का क्षेत्रफल ज्ञात करो। Find the area of the circle $x^2 + y^2 = 2$.

(xii) 52 पत्तों की गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापन किए 2 लाल रंग के पत्ते निकालने की प्रायिकता ज्ञात करों। Find the probability of drawing 2 red cards at random without replacement from a deck of 52 cards.

खण्ड – ब

(प्रत्येक प्रश्न 2 अंक) **(प्रश्न 4 से 13 तक)**

(Each question 2 marks) (Questions 4 to 13)

4. सम्बन्ध R, समुच्चय R पर इस प्रकार परिभाषित है $R = \{(a,\ b) : a \le b\}$ तो सिद्ध करो R स्वतुल्य है परन्तु सममित नहीं है। The relation R is defined on the set R as $R = \{(a,\ b) : a \le b\}$. Prove that R is reflexive but not symmetric.

5. $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$ $x \ne 0$ का सरलतम रूप ज्ञात करो। Find the simplest form of $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$ $x \ne 0$.

6. एक 3×4 आव्यूह की रचना करो जिसके अवयव निम्न प्रकार से प्राप्त होते है $a_{ij} = 2i - j$. Construct a 3 x 4 matrix whose elements are obtained as follows: $a_{ij} = 2i - j$.

7. निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए – Solve the following system of equations:

$$2x + 5y = 1$$
$$5x + 2y = 7$$

8. अन्तराल [1, 3] से $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ के लिए निरपेक्ष उच्चतम व निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात करो। Find the absolute maximum and absolute minimum values for $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ in the interval [1, 3].

9. $(\log x)^{\cos x}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करों। Find the derivative of $(\log x)^{\cos x}$ with respect to x.

10. $y = 500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}$ हो तो सिद्ध करो $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$

If $y = 500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}$, then prove that $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$.

11. $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k},\ \vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ तीन सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}, \vec{c}$ के लम्बवत् है तो λ का मान होगा। If $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k},\ \vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, and $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ are three vectors such that $\vec{a} + \lambda\vec{b}, \vec{c}$ is perpendicular to c, then find the value of λ.

12. $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ तथा वक्र $y = \sin x$ से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करें। Find the area bounded by the curve $y = \sin x$, $x = 0$, and $x = 2\pi$.

13. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$ का मान ज्ञात करो। Find the value of $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$.

खण्ड – स

(प्रत्येक प्रश्न – 3 अंक) **(प्रश्न 14 से 17 तक)**

(Each question 3 marks) (Questions 14 to 17)

14. बिन्दु (-2, 3) से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात करो जिसके किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है।

Find the equation of the curve passing through the point (-2, 3) whose slope at any point (x, y) is $\frac{2x}{y^2}$.

अथवा OR

अवकल समीकरण $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$ का हल ज्ञात करें।

Solve the differential equation $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$.

15. P का मान ज्ञात करो यदि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ तथा $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हो।

Find the value of P if the lines $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ are perpendicular.

अथवा

सिद्ध करो बिन्दुओं (1, -1, 2) (3, 4, -2) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) से जाने वाले रेखा के लम्बवत् है।
Prove that the line passing through the points (1, -1, 2) and (3, 4, -2) is perpendicular to the line passing through the points (0, 3, 2) and (3, 5, 6)

16. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ का मान ज्ञात करें Evaluate $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$.

अथवा

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$ का मान ज्ञात करो। Evaluate $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$

17. एक कलश में 5 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करने के बाद पुनः कलश में रख दी जाती है। पुनः निकाले गए रंग की 2 अतिरिक्त गेंदें कलश में रख दी जाती है तथा कलश में से एक गेंद निकाली जाती है। दूसरी गेंदें की लाल होने की प्रायिकता क्या है?
An urn contains 5 red and 5 black balls. A ball is drawn at random, its color is noted, and then it is replaced in the urn. Two more balls of the same color are also put in the urn and then a ball is drawn again. Find the probability that the second ball drawn is red.

अथवा

एक छात्रावास में 60 प्रतिशत विद्यार्थी हिंदी का, 40 प्रतिशत अंग्रेजी का और 20 प्रतिशत दोनों अखबार पढ़ते हैं।
एक छात्रा को यादृच्छया चुना जाता है।
(1) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिंदी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है।
(2) यदि वह हिंदी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

In a hostel, 60% of the students read Hindi newspaper, 40% read English newspaper, and 20% read both newspapers. A student is selected at random.

(1) Find the probability that she reads neither Hindi nor English newspaper.

(2) If she reads Hindi newspaper, find the probability that she also reads English newspaper.

खण्ड – द

(प्रत्येक प्रश्न – 4 अंक) **(प्रश्न 18 से 20 तक)**

(Each question 4 marks) (Questions 18 to 20)

18. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ का समाकलन ज्ञात करो। Evaluate $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

अथवा

$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{1+\sin x}$ का मान ज्ञात करो। Evaluate $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{1+\sin x}$

19. बिन्दु (1, 2, -4) से जाने वाली और रेखाओं $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y+19}{-16}=\dfrac{z-10}{7}$ तथा $\dfrac{x-15}{3}=\dfrac{y+29}{8}=\dfrac{z-5}{-5}$ पर लम्बवत् रेखा का समीकरण ज्ञात करें। Find the equation of the line passing through the point (1, 2, -4) and perpendicular to the lines $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y+19}{-16}=\dfrac{z-10}{7}$ and $\dfrac{x-15}{3}=\dfrac{y+29}{8}=\dfrac{z-5}{-5}$.

अथवा

रेखाओं $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ और $\vec{r}=(3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।

Find the shortest distance between the lines $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ and $\vec{r}=(3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$.

20. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -3x + 4y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए – Minimize $Z = -3x + 4y$ subject to the following constraints:

$x + 2y \le 8,\quad 3x + 2y \le 12,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0$

अथवा

निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = -x + 2y$ का अधिकतमीकरण कीजिए : Maximize $Z = -x + 2y$ subject to the following constraints:

$x \ge 3,\quad x + y \ge 5,\quad x + 2y \ge 6,\quad y \ge 0$

2025
https://t.me/ShekhawatiMission100
विभिन्न विषयों की नवीनतम PDF ड
करने हेतु QR CODE स्कैन क
पढ़ेगा राजस्थान
बढ़ेगा राजस्थान

कार्यालय: संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग,