बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल ...

शेखावाटी मिशन : 100

गणित (कक्षा : 12)

पढ़ेगा राजस्थान

बढ़ेगा राजस्थान

विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें

कार्यालय : संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

संयोजक कार्यालय – संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

शेखावाटी मिशन - 100 मार्गदर्शक

अनुसूया सिंह

संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चूरू संभाग, चूरू

महेन्द्र सिंह बड़सरा

सहायक निदेशक
संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू
प्रभारी शेखावाटी मिशन 100

रामावतार भदाला

तकनीकी सहयोगी शेखावाटी मिशन 100

संकलनकर्त्ता टीम : गणित

जितेन्द्र फेनिन
रा.उ.मा.वि. रोरू बड़ी (सीकर)

मुकेश रेवाड़
रा.उ.मा.वि. मंगलूना (सीकर)

बजरंग सिंह
रा.उ.मा.वि. काछवा (सीकर)

निखलेश गौड़
रा.उ.मा.वि. टाटनवा, धोद (सीकर)

गोपाललाल गढ़वाल
RP CBEO दांतारामगढ़

प्रश्न–पत्र की योजना 2024

कक्षा – **XII**
विषय – गणित
अवधि – 3 घण्टे 15 मिनट पूर्णांक – 80

1. उद्देश्य हेतु अंकभार –

क्र.सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत
1.	ज्ञान	24	30
2.	अवबोध	20	25
3.	ज्ञानोपयोग/अभिव्यक्ति	24	30
4.	कौशल/मौलिकता	12	15
योग		80	100

2. प्रश्नों के प्रकारवार अंकभार –

क्र. सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रति प्रश्न	कुल अंक	प्रतिशत (अंको का)	प्रतिशत (प्रश्नों का)	संभावित समय
1.	वस्तुनिष्ठ	15	1	15	18.75	29.41	30
2.	रिक्त स्थान	7	1	7	08.75	13.73	15
3.	अतिलघुत्तरात्मक	10	1	10	12.50	19.61	35
4.	लघुत्तरात्मक	12	2	24	30.00	23.53	45
5.	दीर्घउत्तरीय	4	3	12	15.00	07.84	35
6.	निबंधात्मक	3	4	12	15.00	05.88	35
	योग	51		56	100.00	100.00	195 मिनट

विकल्प योजना : खण्ड 'स' एवं 'द' में हैं।

3. विषय वस्तु का अंकभार –

क्र.सं.	विषय वस्तु	अंकभार	प्रतिशत
1	सम्बन्ध एवं फलन	3	03.75
2	प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	4	05.00
3	आव्यूह	5	06.25
4	सारणिक	5	06.25
5	सांतत्यता एवं अवकलनीयता	8	10.00
6	अवकलजो के अनुपयोग	6	07.50
7	समाकलन	12	15.00
8	सकाकलनो के अनुपयोग	4	05.00
9	अवकल समीकरण	6	07.50
10	सदिश बीजगणित	7	08.75
11	त्रिविमीय ज्यामिति	9	11.25
12	रैखिक प्रोग्रामन	4	5.00
13	प्रायिकता	7	8.75
	योग	80	100.00

प्रश्न–पत्र ब्ल्यू प्रिन्ट

कक्षा – **XII** विषय :– गणित पूर्णांक – 80

क्र.सं.	उद्देश्य इकाई / उप इकाई	ज्ञान						अवबोध						ज्ञानोपयोग / अभिव्यक्ति						कौशल / मौलिकता						योग
		वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	
1	सम्बन्ध एवं फलन	1(1)															2(1)									3(2)
2	प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	1(1)							1(1)						1(2)											4(4)
3	आव्यूह	1(1)									2(1)						2(1)									5(3)
4	सारणिक	1(1)								1(2)							2(1)									5(4)
5	सांतत्यता एवं अवकलनीयता	1(1)	1(1)		2(1)						2(2)															8(5)
6	अवकलजो के अनुपयोग	1(1)	1(1)													1(2)							2(1)			6(5)
7	समाकलन	1(1)			2(1)					1(2)			4*(1)					3*(1)								12(6)
8	सकाकलनो के अनुपयोग	1(1)																		1(1)			2(1)			4(3)
9	अवकल समीकरण	1(1)	1(1)							1(1)								3*(1)								6(4)
10	सदिश बीजगणित	1(1)	1(1)		2(1)					1(1)						1(2)										7(6)
11	त्रिविमीय ज्यामिति	1(2)																	4*(1)					3*(1)		9(4)
12	रैखिक प्रोग्रामन																								4*(1)	4(1)
13	प्रायिकता	1(2)										3*(1)					2(1)									7(4)
	योग	14(14)	4(4)		6(3)				1(1)	6(6)	6(3)	3(1)	4(1)		2(2)	4(4)	8(4)	6(3)	4(1)	1(1)			4(2)	3(1)	4(1)	80(51)

विकल्पों की योजना :– खण्ड 'स' एवं 'द' में प्रत्येक में एक आंतरिक विकल्प है। नोटः– कोष्ठक के बाहर की संख्या 'अंकों' की तथा अंदर की संख्या 'प्रश्नों' के द्योतक है।

हस्ताक्षर

अध्याय – 1
सम्बन्ध एवं फलन

अंकभार (1 + 2 = 3)

1. मान लीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4} में, R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)} द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उतर चुनिए।

   (1) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है। (2) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

   (3) R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है। (4) R एक तुल्यता संबंध है।

2. मान लीजिए कि समुच्चय N में, R = {(a, b) : a = b - 2, b > 6} द्वारा प्रदत संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए–

   (1) $(2,4)\in R$ (2) $(3,8)\in R$ (3) $(6,8)\in R$ (4) $(8,7)\in R$

3. R से R में परिभाषित निम्न में से कौनसा फलन एकैकी है–

   (1) F(x) = |x| (2) F(x) = cos x (3) $F(x) = e^x$ (4) $F(x) = x^2$

4. समुच्चय A= {1, 2, 3, 4} से स्वयं तक सभी एकैकी फलन की संख्या होगी –

   (1) 3 (2) 4 (3) 8 (4) 6

5. यदि A = {1, 2, 3} हो तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव (1, 2) तथा (1, 3) हो और स्वतुल्य तथा सममित हैं किन्तु संक्रामक नहीं है, की संख्या है

   (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

6. यदि A = {1, 2, 3} हो तो अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है–

   (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

7. मान लीजिए कि $f:R\to R$, $f(x)=x^4$ द्वारा परिभाष्ति है। सही उतर का चयन कीजिए।

   (1) f एकैकी आच्छादक है (2) f बहुएक आच्छादक है

   (3) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है (4) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

8. मान लीजिए कि $f(x)=3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f:R\to R$ हैं सही उतर चुनिए–

   (1) f एकैकी आच्छादक है (2) f बहुएक आच्छादक है

   (3) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है (4) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

9. निम्न में से कौनसा फलन एकैकी है?

   (1) $f(x)=x^2$ द्वारा प्रदत $f:N\to N$ फलन है। (2) $f(x)=x^2$ द्वारा प्रदत $f:Z\to Z$ फलन है।

   (3) $f(x)=x^2$ द्वारा प्रदत $f:R\to R$ फलन है। (4) इनमें से कोई नहीं

-: Answer :-

1-2, 2-3, 3-3, 4-3, 5-1, 6-2, 7-4, 8-1, 9-1

10. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R=\{(a,b): a \le b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रमक है।

Ans. दिया है, $A=R=$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

तथा $R=\{(a,b): a \le b^2\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, हम जानते है कि $\frac{1}{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2$ सत्य नहीं है।

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \notin R$ अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

सममित संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $-1 \le 3^2 \Rightarrow (-1,3) \in R$ लेकिन $3 \le (-1)^2$

$\Rightarrow (3,-1) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

संक्रमक संबंध के लिए, हम जानते है कि $2 < (-3)^2 \therefore (2,-3) \in R$ तथा $(-3) \le (1)^2$

$\therefore (-3,1) \in R$ लेकिन $2 \le 1^2 \therefore (2,1) \notin R$ अतः R एक संक्रमक संबंध नहीं है।

11. सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में सबंध $R=\{(a,b): a \le b\}$ द्वारा परिभाषित R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है?

Ans. $R=\{(a,b): a \le b\}$

(i) स्वतुल्य : $a \le a$ सत्य है

$a=a \forall a \in R$

$\Rightarrow$ R स्वतुल्य है

(ii) R सममित नहीं है क्योंकि यदि a, b से कम है, तो b,a से कम नहीं हो सकता है।

(iii) a, b, c $\in$ R के लिए $a \le b, b \le c \Rightarrow a \le c$ अतः R संक्रामक संबंध है।

R, स्वतुल्य, संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

12. $f(x)=4x+3$ द्वारा प्रदत फलन $f: R \to R$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलो फलन ज्ञात कीजिए।

Ans. फलन $f: R \to R$ में, $f(x)=4x+3, \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x,y \in R$ इस प्रकार है कि $f(x)=f(y)$

$\Rightarrow 4x+3=4y+3$

$\Rightarrow x=y$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

मान लीजिए प्रत्येक वास्तविक संख्या $y \in R$ के लिए R में, $x \in R$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$f(x)=y \Rightarrow 4x+3=y \Rightarrow x=\frac{y-3}{4}$

$\therefore$ प्रत्यक $y \in R$ के लिए $x = \frac{y-3}{4} \in R$ इस प्रकार है कि

$f(x) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है। अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

अतः $\therefore f^{-1}$ विद्यमान है। मान लीजिए $g : R \to R$ में, $g(x) = \frac{x-3}{4}$ द्वारा परिभाषित है।

13. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत महतम पूर्णांक फलन $f : R \to R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहां $[x], x$ से कम या उसके बराबर महतम पूर्णांक को निरूपित करता है।

Ans. फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = [x], \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है, जहां $[x], x$ से कम या उसके बराबर महतम पूर्णांक फलन है।

चूंकि $f(1,2) = [1,2] = 1$

$f(1,9) = [1,9] = 1$

$\therefore$ $f(1,2) = f(1,9) = 1$ लेकिन $1.2 \neq 1.2$

$\therefore$ f एकैकी फलन नहीं है।

पुनः $0.7 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 0.7$ अर्थात् $[x] = 0.7$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

अतः महतम पूर्णांक फलन न तो एकैकी है न ही आच्छादक है।

14. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाष्ति फलन $f : R \to R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

Ans. क्योंकि $f(-1) = 1 = f(1)$, इसलिए f एकैकी नहीं है। पुनः सहप्रांत R का अवयव -2, प्रात R के किसी भी अवयव x का प्रतिबिंब नहीं है (क्यों?)। अतः f आच्छादक नहीं है।

15. समुच्चय {1, 2, 3, ...n} से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनो की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. समुच्चय {1, 2, 3, ...n} से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या 1, 2, 3,.....n के कुल क्रमचयों की संख्या के बराबर होती है। अर्थात् ${}^{n}P_{n} = n!$

16. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \leq x \leq 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित संबंधों R में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है।

(i) $R = \{(a,b) : |a-b|, 4$ का गुणज है$\}$

Ans. दिया है, $A = \{x \in Z : 0 \leq x \leq 12\}$

$= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

(i) $R = \{(a,b) : |a-b|, 4$ का गुणज है$\}$

चूंकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $|a-a| = 0$, जो कि 4 का गुणज है। अतः R स्वतुल्य संबंध हैं अब, मान लीजिए

$(a,b) \in R \Rightarrow |a-b|, 4$ का गुणज है।

$\Rightarrow |-(b-a), 4$ का गुणज है।

$\Rightarrow |b-a|, 4$ का गुणज है।

$\Rightarrow (b,a) \in R, \forall a,b \in R$

अतः R सममित संबंध है। अब, मान लीजिए $(a,b),(b,c)\in R$, तब $|a-c|$ तथा $|b-c|$ 4 के गुणज है। $|a-c|$, 4 का गुणज है।
$\therefore (a,c)\in R$

$\therefore R$, संक्रमक संबंध है। अतः R, एक तुल्यता संबंध है।

17. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में, R= $\{(1, 2), (2, 1)\}$ द्वारा प्रदत संबंध R सममित है किंतु न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रमक है।

Ans. दिया है, $A = \{1, 2, 3\}$

तथा $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$,

चूंकि $(1, 1), (2, 2), (3, 3), \notin R$, $\therefore$ R, स्वतुल्य संबंध नहीं है। अब, चूंकि $(1,2)\in R$ तथा $(2,1)\in R$
$\therefore R$ सममित संबंध है। पुनः $(1,2)\in R$ तथा $(2,1)\in R$ लेकिन $(1,1)\notin R$ अतः R, संक्रमक संबंध नहीं हैं इसलिए R सममित संबंध है। लेकिन R, स्वतुल्य संबंध तथा संक्रमक संबंध नहीं है।

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें

अध्याय – 2
प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

अंकभार (1 + 1 + 1 + 1 = 4)

1. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\sec^{-1}(-2)$ बराबर है–

(1) π (2) $-\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{2\pi}{3}$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान है–

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 1

3. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ का मान है–

(1) π (2) $-\frac{\pi}{2}$ (3) 0 (4) $2\sqrt{3}$

4. $\sin\left(\tan^{-1}x\right), |x|<1$ बराबर होता है–

(1) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मान बराबर है–

(1) $\frac{7\pi}{6}$ (2) $\frac{5\pi}{6}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

-: Answer :-

1-2, 2-4, 3-2, 4-4, 5-2

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

6. $2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=$.....

Ans. $2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$=2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

7. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=$.....

Ans. $\because \sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$, $\sin^{-1}x$ का मुख्य मान $=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sin^{-1}\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$

8. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = ...$

Ans. $\because \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ का मुख्यमान $= [0, \pi]$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

9. यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1} x\right) = 1$ तब $x = ...$

Ans. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1} x\right) = 1$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1} x = \sin^{-1} 1$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}\left[\because \sin\frac{\pi}{2} = 1\right]$$

$$\Rightarrow \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \cos^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{5} \qquad \left[\because \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

10. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = ...$

Ans. $\sin^{-1} x$ का मुख्यमान $= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\therefore \sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$$

11. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right] = ...$

Ans. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right] = \tan^{-1}\left[2\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)\right]$ $\left(\because \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right) = \tan^{-1}\left(2\times\frac{1}{2}\right) \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right]$$

$$= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \qquad \left[\because \tan\frac{\pi}{4} = 1\right]$$

12. $\cot\left(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a\right)=$.....

Ans. $\cot\left(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a\right)=\cot\frac{\pi}{2}$ $\left[\because \tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right]$

$=0$

13. $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=$.....

Ans. $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\tan^{-1}(1)+\left[\pi-\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ $\left[\begin{array}{l}\because \sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x \\ \cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x\end{array}\right]$

$=\frac{\pi}{4}+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi+8\pi-2\pi}{12}=\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$

14. $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}$ का मान ..... है।

Ans. $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{2}{11}+\frac{7}{24}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{7}{24}}\right]$ $\left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{48+77}{264}}{1-\frac{14}{264}}\right]$

$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{125}{264}}{\frac{264-14}{264}}\right]=\tan^{-1}\frac{\frac{125}{264}}{\frac{250}{264}}=\tan^{-1}\left[\frac{125}{250}\right]=\tan^{-1}\frac{1}{2}$

अध्याय – 3
आव्यूह

अंकभार (1 + 2 + 2 = 5)

1. 3 × 3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल संख्या कितनी होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है?

(1) 27 (2) 18 (3) 81 (4) 512

2. मान लिजिए कि x, y, z, w तथा p क्रमशः 2×n, 3×k, 2×p, n×3 तथा p × k कोटियों के आव्यूह है। यदि n = p हो तो आव्यूह 7x – 5z की कोटि है।

(1) p×2 (2) 2×n (3) n×3 (4) p×n

3. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तथा $A+A'=I$, हो तो α का मान होगा?

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) π (4) $\frac{3\pi}{2}$

4. आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि –

(1) AB = BA (2) AB = BA = 0 (3) AB = 0, BA = I (4) AB = BA = I

5. यदि $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2=I$ तो

(1) $1+\alpha^2+\beta\gamma=0$ (2) $1-\alpha^2+\beta\gamma=0$ (3) $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$ (4) $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

-: Answer :-

1-4, 2-2, 3-2, 4-4, 5-3

6. x तथा y का मान ज्ञात कीजिए, यदि $x+y=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 9\end{bmatrix}$ तथा $x-y=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ है।

Ans. यहां पर $(x+y)+(x-y)=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

या $(x+x)+(y-y)=\begin{bmatrix}8 & 8\\ 0 & 8\end{bmatrix}$

या $2x=\begin{bmatrix}8 & 8\\ 0 & 8\end{bmatrix}$ या $x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}8 & 8\\ 0 & 8\end{bmatrix}$

या $x=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

साथ ही $(x+y)-(x-y)=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

या $(x-x)-(y+y)=\begin{bmatrix}5-3 & 2-6\\ 0-0 & 9+1\end{bmatrix}$

या $2y=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 10\end{bmatrix}$ या $y=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 10\end{bmatrix}$

या $y=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 5\end{bmatrix}$

7. निम्नलिखित समीकरण से x एवं y का मान ज्ञात कीजिए।

$$2\begin{bmatrix}x & 5\\ 7 & y-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 15 & 14\end{bmatrix}$$

Ans. दिया गया है $2\begin{bmatrix}x & 5\\ 7 & y-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 15 & 14\end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix}2x & 10\\ 14 & 2y-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 15 & 14\end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix}2x+3 & 10-4\\ 14+1 & 2y-6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 15 & 14\end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix}2x+3 & 6\\ 15 & 2y-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 15 & 14\end{bmatrix}$ (संगत अवयवों की तुलना करने पर)

या $2x+3=7$ तथा $2y-4=14$

या $2x=7-3$ तथा $2y=14+4$

या $2x=4$ तथा $2y=18$

या $x=\frac{4}{2}$ तथा $y=\frac{18}{2}$

या $x=2$ तथा $y=9$

8. यदि $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए $F(x).F(y)=F(x+y)$

Ans. $F(y)$ के लिए x के स्थान पर y रखे तथा इसी प्रकार $F(x+y)$ के लिए x के स्थान पर $x+y$ रखे।

बांया भाग $F(x).F(y)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos y & -\sin y & 0\\ \sin y & \cos y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

या $F(x).F(y)=\begin{bmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y & 0\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\therefore \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\ \therefore \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B\end{bmatrix}$

या $F(x).F(y)=\begin{bmatrix}\cos(x+y & -\sin(x+y) & 0\\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

या $F(x).F(y)=F(x+y)$

9. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ है तो $A^2-5A+6I$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}4+0+1 & 0+0-1 & 2+0+0\\ 4+2+3 & 0+1-3 & 2+3+0\\ 2-2+0 & 0-1+0 & 1-3+0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ 9 & -2 & 5\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$

$\therefore A^2-5A+6I=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ 9 & -2 & 5\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore A^2-5A+6I=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ 9 & -2 & 5\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 0 & 5\\ 10 & 5 & 15\\ 5 & -5 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^2-5A+6I=\begin{bmatrix}5-10+6 & -1-0+0 & 2-5+0\\ 9-10+0 & -2-5+6 & 5-15+0\\ 0-5+0 & -1+5+0 & -2-0+6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^2-5A+6I=\begin{bmatrix}1 & -1 & -3\\ -1 & -1 & -10\\ -5 & 4 & 4\end{bmatrix}$

10. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ एवं $A^2=k.A-2I$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $A^2=A.A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

या $A^2=\begin{bmatrix}9-8 & -6+4\\ 12-8 & -8+4\end{bmatrix}$

या $A^2=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}$

$\therefore A^2=k.A-2I$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3k & -2k\\ 4k & -2k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3k-2 & -2k\\ 4k & -2k-2\end{bmatrix}$

समान आव्यूह के गुणधर्म द्वारा समान आव्यूह के संगत अवयवों को समान रखने पर

$3k-2=1\Rightarrow k=1$

$-2k=-2\Rightarrow k=1$ अतः $k=1$

$4k=4\Rightarrow k=1$

$-4=-2k-2\Rightarrow k=1$

11. यदि $A=\begin{bmatrix}-2\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए $(AB)'=B'A'$ है।

जहां A', आव्यूह A का परिवर्त आव्यू है।

Ans. यहां $A=\begin{bmatrix}-2\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$ एवं $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}$

इसलिए $AB=\begin{bmatrix}-2\\ 4\\ 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 12\\ 4 & 12 & -24\\ 5 & 15 & -30\end{bmatrix}$

अतः $(AB)'=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5\\ -6 & 12 & 15\\ 12 & -24 & -30\end{bmatrix}$

अब $A' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ एवं $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

इसलिए $B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$

अतः $(AB)' = B'A'$

12. यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो $(A+2B)'$ ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया गया है– $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

अतः $B' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore (A+2B)' = A' + (2B)'$

$\Rightarrow (A+2B)' = A' + 2B'$

$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -2-2 & 3+2 \\ 1+0 & 2+4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

13. यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह है तो दर्शाइए कि AB सममित है, यदि और केवल यदि A तथा B क्रमविनिमेय है, अर्थात् AB = BA है।

Ans. दिया है कि A तथा B दोनों सममित आव्यूह है, इसलिए A' = A तथा B' = B है।

मान लीजिए कि AB सममित है तो = (AB)' = AB

किन्तु (AB)' = B'A' = BA

अतः AB = BA

विलोमत– यदि AB = BA है तो हम सिद्ध करेगें कि AB सममित है।

अब (AB)' = B'A'

(AB)' = BA ($\therefore$ A एवं B सममित है)

अतः AB सममित है।

14. x के किस मान के लिए $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}=0$ है।

Ans. दिया गया है– $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}=0$

या $\begin{bmatrix}1+4+1 & 2+0+0 & 0+2+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}=0$

या $\begin{bmatrix}6 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}=0$

या $\begin{bmatrix}0+4+4x\end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow 4+4x=0 \Rightarrow 4x=-4$

अतः $x=\frac{-4}{4}=-1$

अतः $x=-1$

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम **QR CODE** स्कैन करें

अध्याय – 4
सारणिक

अंकभार (1 + 1 + 1 + 2 = 5)

1. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान होगा?

(1) 0 (2) 1 (3) –1 (4) 3

2. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है–

(1) 6 (2) –6 (3) ± 6 (4) 0

3. तीन संरेख बिन्दुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा –

(1) 0 (2) 1 (3) –1 (4) ± 1

4. यदि n कोटि का एक वर्ग आव्यूह A हो तो |adj(A)| होगा–

(1) |A| (2) $|A|^n$ (3) $|A|^{n+1}$ (4) $|A|^{n-1}$

5. यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो del (A^{-1}) होगा–

(1) del(A) (2) $\frac{1}{del(A)}$ (3) 1 (4) 0

-: Answer:-

1-2, 2-3, 3-1, 4-4, 5-2

6. यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया है कि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

या $3 - x^2 = 3 - 8$

या $x^2 = 8$

अतः $x = \pm 2\sqrt{2}$

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$

Ans. दिया गया है $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = 2 - 8 = -6$

$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$|2A| = 2\times 4 - 8\times 4 = 8 - 32 = -24$

अतः $|2A| = -24 = 4(-6) = 4|A|$

अतः $|2A| = 4|A|$

8. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (3, 8), (-4, 2) एवं (5, 1) है।

Ans. त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)\right]$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(3 + 72 - 14)$$

$\Delta = \frac{61}{2}$ वर्ग इकाई

9. यदि $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया गया है $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

अर्थात् $10 - 12 = 5x - 6x$

अर्थात् $-2 = -x$

अर्थात् $x = 2$

10. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

Ans. हम जानते है कि $A_{11} = 4, A_{12} = -1$

$A_{21} = -3, A_{22} = 2$

अतः $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

11. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक व सहखंड ज्ञात कीजिए।

Ans. अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

यहां $a_{11} = 1$, इसलिए $M_{11} = a_{11}$ का उपसारिणक $= 3$

$M_{12} =$ अवयव a_{12} का उपसारणिक $= 4$

$M_{21} =$ अवयव a_{21} का उपसारणिक $= -2$

$M_{22} =$ अवयव a_{22} का उपसारणिक $= 1$

अब a_{ij} का सहखंड A_{ij} है। इसलिए

$A_{11} = (-1)^{1+1|} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2|} M_{12} = (-1)^3 (-4) = 4$

$A_{21} = (-1)^{2+1|} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2|} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$

12. सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. ध्यान दीजिए कि तीसरे स्तंभ में दो प्रविष्टियां शून्य हैं इसलिए तीसरे स्तंभ (C_3) के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

$\Delta = 4(-1-12) - 0 + 0$

$\Delta = -52$

13. सारणिकों का प्रयोग करके A(1,3) और B(0, 0) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए और k का मान ज्ञात कीजिए। यदि एक बिन्दु D(k, 0) इस प्रकार है कि ΔABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

Ans. मान लीजिए, AB पर कोई बिन्दु P(x, y) है तब

ΔABP का क्षेत्रफल $= 0$

इसलिए $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

इससे प्राप्त है $\frac{1}{2}(y - 3x) = 0$

या $y = 3x$

जो अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

किन्तु ΔABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई दिया है अतः

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3$

हमें प्राप्त है $\frac{-3k}{2} = \pm 3$

अतः $k = \pm 2$

14. प्रदर्शित कीजिए कि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

समीकरण $A^2-4A+I=0$, जहां $I,2\times 2$ कोटि का एक तत्समक आव्यूह है और $0,2\times 2$ कोटि का एक शून्य आव्यूह हैं इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

Ans. हम जानते है कि

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}$$

अतः $A^2-4A+I=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 12\\ 4 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$

अब $A^2-4A+I=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$$

$\Rightarrow A^2-4A+I=0$ को A^{-1} से गुणा करने पर

$\Rightarrow A^{-1}.(A^2-4A+I)=A^{-1}.0$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)A-4A^{-1}A+A^{-1}=0$

$\Rightarrow A-4I+A^{-1}=0$

$\Rightarrow A^{-1}=4I-A$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

अतः $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

15. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ है।

Ans. हत जानते है कि $AB=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}67 & 87\\ 47 & 61\end{bmatrix}$

क्योंकि $|AB|=\begin{vmatrix}67 & 87\\ 47 & 61\end{vmatrix}=4087-4089=-2\neq 0$

$(AB)^{-1}$ का अस्तित्व है और इसे निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{AB}.adj(AB)=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}61 & -87\\ -47 & 67\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{61}{2} & \frac{87}{2}\\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2}\end{bmatrix}$$

और $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1 \neq 0$

और $|B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 54 - 56 = -2 \neq 0$

इसलिए A^{-1} एवं B^{-1} दोनों का अस्तित्व है और निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$A^{-1} = \frac{1}{(A)} adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

एवं $B^{-1} = \frac{1}{|B|} adj(B) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$

अतः $B^{-1}.A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$

$$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$$

अतः $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

16. आव्यूहों के गुणनफल $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$x - y + 2z = 1$

$2y - 3z = 1$

$3x - 2y + 4z = 2$

Ans. दिया गया गुणनफल

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

अब दिए गए समीकरण निकाय को आव्यूह के रूप में निम्नलिखित प्रकार से लिख जा सकता है।

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+6-4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अतः $x=0, y=5, z=3$

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें

अध्याय – 5
सांतत्य और अवकलनीयता

अंकभार (1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8)

1. फलन $f(x)=[x]$ असंतत है–

(1) प्रत्येक वास्तविक संख्या पर (2) प्रत्येक परिमेय संख्या पर

(3) प्रत्येक पूर्णांक पर (4) प्रत्येक अपरिमेय संख्या पर

2. यदि $y=\cos\left(\sqrt{x}\right)$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा –

(1) $-\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$ (2) $-\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$ (3) $\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$ (4) $\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

3. $x^3\log x$ का x के सापेक्ष द्वितीय कोटि का अवकलज है–

(1) $x(5+6\log x)$ (2) $x^2(5+6\log x)$ (3) $x(6+5\log x)$ (4) $x^2(6+5\log x)$

4. फलन $3y=\sin x-2x$ का x के सापेक्ष अवकलन है–

(1) $\frac{\cos x+2}{3}$ (2) $\frac{2-\cos x}{3}$ (3) $\frac{\cos x-2}{3}$ (4) $\frac{\cos x-2}{-3}$

5. यदि $y=x,\log_e x$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा –

(1) $\frac{1}{1+x}$ (2) $\frac{1}{x}$ (3) $\log_e(1+x)$ (4) $1+\log_e x$

-: Answer :-

1-3, 2-1, 3-1, 4-3, 5-2

6. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right]=$ ..... है।

Ans. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}\times e^{\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$

7. $\frac{d}{da}\left(a^x\right)=$ ..... है।

Ans. $\frac{d}{da}\left(a^x\right)=xa^{x-1}$

8. यदि $y=\tan^{-1}x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}=$ ..... है।

Ans. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2},\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\times 2x=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

9. फलन $f(x)=|(x-3|, x\in R, x$ के मान ..... पर अवकलनीय नहीं है।

Ans. $x=3$ पर $f(x)=|(x-3)|$ अवकलनीय फलन नहीं होता है।

10. $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & if\ x\neq 0\\ 0, & if\ x=0\end{cases}$

Ans. यहां, $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & if\ x\neq 0\\ 0, & if\ x=0\end{cases}$

अब, $LHL=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$

$x=0-h$ रखने पर, $x\to 0^-\Rightarrow h\to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{|0-h|}{0-h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{-h}=-1$

तथा $RHL=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$

$x=0+h$ रखने पर $x\to 0^+\Rightarrow h\to 0\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{|0+h|}{0+h}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{h}{h}=1$

$\therefore$ $LHL\neq RHL$

अतः $f(x), x=0$ पर असतत फलन है।

11. f के सतत्ता की जांच कीजिए, जहां f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x, & if\ x\neq 0\\ -1, & if\ x=0\end{cases}$

Ans. यहां, $f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x, & if\ x\neq 0\\ -1, & if\ x=0\end{cases}$

अब, $LHL=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\sin x-\cos x)$

$x=0-h$ रखने पर, $x\to 0^-\Rightarrow h\to 0$

$\lim\limits_{h\to 0}[\sin(0-h)-\cos(0-h)]=\lim\limits_{h\to 0}(-\sinh-\cosh)=0-1=-1$

तथा $RHL=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x-\cos x)$

$x=0+h$ रखने पर, $x\to 0^+\Rightarrow h\to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}[\sin(0+h)-\cos(0+h)]=\lim\limits_{h\to 0}(\sinh-\cosh)=0-1=-1$

$\therefore$ $LHL=RHL=f(0)$

अतः $f(x), x=0$ पर सतत फलन है।

हम जानते हैं कि $x<0$ के लिए $f(x)=\sin x-\cos x$ सतत फलन है तथा $x>0$ के लिए $f(x)=\sin x-\cos x$ सतत् फलन है।

अतः $f(x), x$ के प्रत्येक मान के लिए सतत है।

निम्नलिखित प्रश्नों में k के मानों को ज्ञात कीजिए, ताकि प्रदत फलन निर्दिष्ट बिन्दु पर सतत हो। (प्र.सं. 12–13)

12. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}, & \text{यदि } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 3, & \text{यदि } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Ans. यहां, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}, & \text{यदि } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 3, & \text{यदि } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

अब, $LHL=\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{2}}\dfrac{k\cos}{\pi-2x}$

$x=\dfrac{\pi}{2}-h$ रखने पर, $x\to\dfrac{\pi^-}{2}\Rightarrow h\to 0$

$$\Rightarrow\lim_{h\to0}\frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}=\lim_{h\to0}\frac{k\sinh}{2h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{k}{2}\times\frac{\sinh}{h}=\frac{k}{2}\times1=\frac{k}{2}\qquad\left(\because\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

तथा $RHL=\lim\limits_{x\to\frac{\pi^-}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}$

$x=\dfrac{\pi}{2}+h$ रखने पर, $x\to\dfrac{\pi^+}{2}\Rightarrow h\to 0$

$$\Rightarrow\lim_{h\to0}\frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}=\lim_{h\to0}\frac{-k\sinh}{-2h}=\lim_{-2h}=\lim_{h\to0}\frac{k}{2}\times\frac{\sinh}{h}$$

$$=\frac{k}{2}\times1=\frac{k}{2}\qquad\left(\because\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

पुनः, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$

चूंकि $f(x), x=\dfrac{\pi}{2}$ पर सतत फलन है।

$\therefore$ $LHL=RHL=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{k}{2}=3\qquad\Rightarrow k=6$

13. $f(x)=\begin{cases} kx+1, & \text{यदि } x\le 5 \\ 3x-5, & \text{यदि } x>5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x=5$ पर

Ans. यहां, $f(x)=\begin{cases} kx+1, & \text{यदि } x\le 5 \\ 3x-5, & \text{यदि } x>5 \end{cases}$

अब, $LHL=\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}(kx+1)$

$x=5-h$ रखने पर, $x\to 5^-\Rightarrow h\to 0$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{h\to 0}[k(5-h)+1]=\lim\limits_{h\to 0}[5k-kh+1]=5k+1$

तथा $RHL=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}(3x-5)$

$x=5+h$ रखने पर, $x\to 5^+\Rightarrow h-0$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{h\to 0}[3(5+h)-5]=\lim\limits_{h\to 0}(10+3h)=10$

पुनः, $f(5)=5k+1 \qquad [\because f(x)=kx+1]$

$\because f(x)x=5$ पर सतत् फलन है।

$\therefore \quad LHL=RHL=f(5)$

$LHL=RHL=f(5)\Rightarrow 5k+1=10\Rightarrow k=\dfrac{9}{5}$

14. दर्शाइए कि $f(x)=|\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक सतत् फलन है।

Ans. मान लीजिए $g(x)=\cos x$ तथा $h(x)=|x|$

हम जानते है कि प्रत्येक $x\in R$ के लिए $g(x)=\cos x$ सतत् फलन है।

पुनः प्रत्येक $x\in R$ के लिए मापांक फलन $h(x)=|x|$ सतत् फलन होता हैं अतः संयोजक फलन,

प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $(hog)(x)=h(g(x))=h(\cos x)=|\cos x|$ सतत फलन होगा।

अतः $f(x)=|\cos x|$, प्रत्येक $x\in R$ के लिए सतत् फलन है।

15. $y=\cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$

(i) $\dfrac{dy}{dx}=?$

Ans. $\tan^{-1}x=\theta$ अर्थात् $x=\tan\theta$ रखने पर,

$\therefore \quad y=\cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\cos^{-1}\left(\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \qquad \left(\because \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta\right)$

$\Rightarrow \quad y=\cos^{-1}(\cos 2\theta)=2\theta=2\tan^{-1}x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\dfrac{dy}{dx}=2\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\dfrac{2}{1+x^2} \qquad \left(\because \dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x=\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

(ii) $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$

Ans. $x=\tan\theta \Rightarrow \tan^{-1}x=\theta$ रखने पर,

$\therefore y=\sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=\sin^{-1}(\cos 2\theta)$

$\Rightarrow y=\sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]$

$\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\theta \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)$

$\frac{dy}{dx}=0-\frac{2}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2}{1+x^2}$ $\left[\because \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}\right]$

18. $y=\sin\left(\tan^{-1}e^{-x}\right)$

$\frac{dy}{dx}=?$

Ans. मान लीजिए $y=\sin\left(\tan^{-1}e^{-x}\right)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)\right]$

$=\cos\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)$ (श्रृंखला नियम से)

$=\cos\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)\frac{1}{1+\left(e^{-x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)$

$=\cos\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)\frac{1}{1+e^{-2x}}=-\frac{e^{-x}\cos\left(\tan^{-1}e^{-x}\right)}{1+e^{-2x}}$

17. $y = \log(\cos e^x)$

$\frac{dy}{dx} = ?$

Ans. मान लीजिए $y = \log(\cos e^x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\log(\cos(e^x))\right] = \frac{1}{\cos(e^x)}\frac{d}{dx}(\cos(e^x))$ (श्रृंखला नियम से)

$= \frac{1}{\cos(e^x)}\{-\sin(e^x)\}\frac{d}{dx}(e^x)$

$= -\tan(e^x).e^x = -e^x \tan(e^x)$

18. $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) -1 < x < 1$

$\frac{dy}{dx} = ?$

Ans. $x = \tan\theta \Rightarrow \tan^{-1} x$ रखने पर,

$y = \cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$\Rightarrow y = \cos^{-1}(\sin 2\theta)$ $\left(\because \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$\Rightarrow y = \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right]$ $\left[\because \sin 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right]$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - 2\theta \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} x$ $\left(\because \theta = \tan^{-1} x\right)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2}$ $\left[\because \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}\right]$

19. $y^x = x^y$ $\frac{dy}{dx} = ?$

Ans. दिया है, $y^x = x^y$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y^x = \log y^x \Rightarrow x\log y = y\log x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(x\log y)=\frac{d}{dx}(y\log x)$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}+(\log y)=y\frac{1}{x}+(\log x)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}-(\log x)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\log y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y}-\log x\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\log y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-y\log x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y-x\log y}{x}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\frac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$$

20. $x=\alpha\cos\theta, y=b\cos\theta$ $\qquad \frac{dy}{dx}=?$

Ans. दिया है, $x=a\cos\theta$ तथा $y=b\cos\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{d\theta}=a(-\sin\theta)$ तथा $\frac{dy}{d\theta}=b(-\sin\theta)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{dy}{d\theta}\times\frac{d\theta}{}=\frac{-b\sin\theta}{-a\sin\theta}=\frac{b}{a} \qquad \left(\because \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

21. $x=\sin t, y=\cos 2t$ $\qquad \frac{dy}{dx}=?$

Ans. $x=\sin t$ तथा $y=\cos 2t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\therefore \frac{dx}{dt}=\cos t$ तथा $\frac{dy}{dt}=-(\sin 2t)2$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx} \qquad \left(\because \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$$

$$=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=\frac{-2(2\sin t\cos t)}{\cos t}=-4\sin t \qquad (\because \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta)$$

22. $y = \log(\log x)$ $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

Ans. मान लीजिए $y = \log(\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\log x}\right) = \frac{d}{dx}(x\log x)^{-1}$

$$= -1(x\log x)^{-2}\frac{d}{dx}(x\log x)$$

$$= -\frac{1}{(x\log x)^2}\left[x\frac{d}{dx}\log x + \log x\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$= -\frac{1}{(x\log x)^2}\left(x.\frac{1}{x} + \log x.1\right) = \frac{-(1+\log x)}{(x\log x)^2}$$

23. यदि $y = 5\cos x - 3\sin x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

Ans. दिया है, $y = 5\cos x - 3\sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = -5\sin x - 3\cos x$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-5\sin x - 3\cos x) = -5\cos x + 3\sin x = -(5\cos x - 3\sin x) = -y$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

24. यदि $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$

Ans. दिया है, $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 500e^{7x}\frac{d}{dx}(7x) + 600e^{-7x}\frac{d}{dx}(-7x)$$

$$= 500e^{7x}.7 + 600e^{-7x}.(-7)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (7\times 500)e^{7x}.7 - (7\times 600)e^{-7x}(-7)$$

$$= 49\left(500e^{7x} + 600e^{-7x}\right) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 49y$$

25. $y = (\log x)^{\log x}$ के दोनों तरफ का लघुगणक लेकर अवकलन कीजिए।

Ans. मान लीजिए $y = (\log x)^{\log x}$

दोनो तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \log\left[(\log x)^{\log x}\right]$$

$$\Rightarrow \log y = \log x \log(\log x) \qquad \left(\because \log m^n = n\log m\right)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left\{(\log x)\frac{d}{dx}\log(\log x)\right\} + \log\log(x)\frac{d}{dx}\log(x)$$

$$= (\log x)\frac{1}{\log x}\frac{1}{x} + \log(\log x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\{1+\log(\log x)\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\{1+\log(\log x)\}$$

$$= \frac{(\log x)^{\log x}}{x}(1+\log(\log x)) = (\log x)^{\log x}\left[\frac{1}{x} + \frac{\log(\log x)}{x}\right]$$

26. a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{यदि } x \le 3 \\ bx+3, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 3$ पर संतत है।

Ans. दिया है: फलन $x = 3$ पर संतत हैं। इसलिए बाएं पक्ष की सीमा $=$ दाएं पक्ष की सीमा $= f(3)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} ax+1 = \lim_{x\to 3^+} bx+3 = 3a+1$$

$$\Rightarrow 3a+1 = 3b+3 = 3a+1$$

$$\Rightarrow 3a = 3b+2 \Rightarrow a = b+\frac{2}{3}$$

अध्याय – 6
अवकलज के अनुप्रयोग

अंकभार (1 + 1 + 2 + 2 = 6)

1. एक 10 m त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 m^3/h की दर से गेंहू भरा जाता हैं भरे गए गेहूं की गहराई की वृद्धि दर है–

(1) 1 m/h (2) 0.1 m/h (3) 1.1 m/s (4) 0.5 m/h

2. निम्नलिखित में से किस अंतराल में $y = x^2 e^{-x}$ वर्धमान है?

(1) $(-\infty,\infty)$ (2) $(-2,0)$ (3) $(2,\infty)$ (4) $(0,2)$

3. एक वृत की त्रिज्या r = 6 cm पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है–

(1) 10π (2) 12π (3) 8π (4) 11π

4. एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में $R(x)= 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत है। जब x = 15 है तो सीमांत आय है–

(1) 116 (2) 96 (3) 90 (4) 126

5. निम्नलिखित में कौन से फलन $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है?

(1) cos x (2) sin x (3) cos 3x (4) tan x

6. निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x)=x^{400}+\sin x-1$ द्वारा प्रदत फलन f ह्रासमान है?

(1) $(0,1)$ (2) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ (3) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (4) इनमें से कोई नहीं

-: Answer :-

1-1, 2-4, 3-2, 4-4, 5-1, 6-4

7. यदि $f(x)=-|x+1|+3$ तो $f(x)$ का अधिकतम मान ..... है।

Ans. दिया गया फलन $g(x)=-|x+1|+3$

हम जानते है कि प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $|x+1|\geq 0$

$\Rightarrow$ प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $-|x+1|\leq 0$

$\Rightarrow$ प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $-|x+1|+3\leq 3$

g का उच्चतम मान तभी ज्ञात किया जा सकता

जब $|x+1|=0$ या $x=-1$

अर्थात $|x+1|=0\Rightarrow x=-1$

$\therefore$ g का उच्चतम मान $=g(-1)=|-1+1|+3=3$

8. एक वृत की त्रिज्या 0.7 सेमी/सेकण्ड की दर से वृद्धि हो रही है, तब वृत की परिधि में परिवर्तन की दर ..... होगी।

Ans. मान लीजिए समय (t) पर वृत की त्रिज्या r है और इसकी परिधि c है।

तब $c=2\pi r$

परिधि की वृद्धि की दर, $\frac{dc}{dt}=2\pi\frac{dr}{dt}$ (t के सापेक्ष अवकलन करने पर, श्रृंखला नियम द्वारा)

जहां, $\frac{dr}{dt}$ त्रिज्या की वृद्धि की दर है।

$\therefore \frac{dr}{dt}=0.7$ सेमी/से

$\frac{dc}{dt}=2\pi(0.7)$ सेमी/से $=14\pi$ सेमी/से ($\because \frac{dr}{dt}=0.7$ सेमी/से, दिया है)

$\therefore$ अतः परिधि की वृद्धि की दर 14π सेमी/से है।

9. अंतराल $[1,5]$ में $f(x)=2x^3-15x^2+36x+1$ द्वारा प्रदत फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

Ans. हमें ज्ञात है

$f(x)=2x^3-15x^2+36x+1$

या $f'(x)=6x^2-30x+36=6(x-3)(x-2)$

ध्यान दीजिए $f'(x)=0$ से $x=2$ और $x=3$ प्राप्त होते हैं।

अब हम इन बिन्दुओं और अंतराल $[1,5]$ के अंत्य बिन्दुओं अर्थात $x=1,x=2,x=3$ और $x=5$ पर f के मान का परिकलन करेंगे। अब

$$f(1)=2(1^3)-15(1^2)+36(1)+1=24$$
$$f(2)=2(2^3)-15(2^2)+36(2)+1=29$$
$$f(3)=2(3^3)-15(3^2)+36(3)+1=28$$
$$f(5)=2(5^3)-15(5^2)+36(5)+1=56$$

इस प्रकार, हम निष्कर्ष पर पहुंचते है कि अंतराल $[1,5]$ पर फलन f के लिए $x=5$ पर निरपेक्ष उच्चतम मान 56 और $x=1$ पर निरपेक्ष निम्मनतम मान 24 है।

10. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x)=\sin x+\cos x, 0\le x\le 2\pi$ द्वारा प्रदत फलन f वर्धमान या ह्रासमान है।

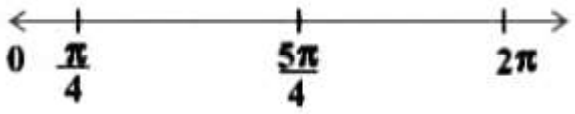
Ans. ज्ञात है कि

$f(x)=\sin x+\cos x, 0\le x\le 2\pi$

या $f'(x)=\cos x-\sin x$

अब $f'(x)=0$ से $\sin x=\cos x$ जिससे हमें $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ प्राप्त होते हैं। क्योंकि $0\le x\le 2\pi$

बिन्दु $x=\frac{\pi}{4}$ और $x=\frac{5\pi}{4}$ अंतराल $[0,2\pi]$ को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामतः $\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ में विभक्त करते हैं।



ध्यान दीजिए कि $f'(x)>0$ यदि $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$

अतः अंतरालों $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ में फलन f वर्धमान है।

और $f'(x)<0$, यदि $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

अतः f अंतराल $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ में ह्रासमान है।

11. दिखाइए कि प्रदत फलन f,

$f(x)=x^3-3x^2+4x, x\in R$

R परवर्धमान फलन है।

Ans. ध्यान दीजिए कि

$f(x)=3x^2-6x+4$

$=3\left(x^2-2x+1\right)+1$

$=3(x-1)^2+1>0$, सभी $x\in R$ के लिए

इसलिए फलन f, R पर वर्धमान है।

12. सिद्ध कीजिए कि प्रदत फलन $f(x)=\cos x$

$(a)(0,\pi)$ में ह्रासमान है

$(b)(\pi,2\pi)$ में वर्धमान है

$(c)(0,2\pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

Ans. ध्यान दीजिए कि $f'(x)=-\sin x$

(a) चूंकि प्रत्येक $x\in(0,\pi)$ के लिए $\sin x>0$, हम पाते हैं कि $f'(x)<0$ और इसलिए $(0,\pi)$ में f ह्रासमान है।

(b) चूंकि प्रत्येक $x\in(\pi,2\pi)$ के लिए $\sin x<0$, हम पाते है कि $f'(x)>0$ और इसलिए $(\pi,2\pi)$ में f वर्धमान है।

(c) उपरोक्त (a) और (b) से स्पष्ट है कि $(0,2\pi)$ में f न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

13. वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x)=4x^3-6x^2-72x+30$ द्वारा प्रदत फलन f (a) वर्धमान (b) ह्रासमान हैं।

Ans. यहां

$f(x)=4x^3-6x^2-72x+30$

या $f'(x)=12x^2-12x-72$

$=12\left(x^2-x-6\right)$

$=12(x-3)(x+2)$

इसलिए $f'(x)=0$ से $x=-2,3$ प्राप्त होते हैं। $x=-2$ और $x=3$ वास्तविक रेखा को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामतः $(-\infty,2),(-2,3)$ और $(3,\infty)$ में विभक्त करता है (चित्रानुसार)

अंतरालों $(-\infty,-2)$ और $(3,\infty)$ में $f'(x)$ धनात्मक है जबकि अंतराल $(-2,3)$ में $f'(x)$ ऋणात्मक है। फलस्वरूप फलन f अंतरालों $(-\infty,-2)$ और $(3,\infty)$ में वर्धमान है जबकि अंतराल $(-2,3)$ में फलन ह्रासमान हैं तथापि f, R पर न तो वर्धमान है ओर न ही ह्रासमान है।

14. ऐसी दो संख्याएं ज्ञात कीजिए, जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम हो।

Ans. सब से पहले हम दो संख्या x और $(24-x)$ मानते है फिर हम $y=x(24-x)$ मानते हैं अब अवकलन का अनुप्रयोग करके दोनों संख्या ज्ञात करते है।

मान लीजिए पहली संख्या x है, तब दूसरी संख्या $(24-x)$ है।

($\because$ दो संख्याओं का योग 24 है)

यदि y के सापेक्ष का गुणनफल को दर्शाता है तो

$$y=x(24-x)=24x-x^2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=24-2x \text{ और } \frac{d^2y}{dx^2}=-2$$

अब $\frac{dy}{dx}=0$ रखने पर

$\Rightarrow$ $24-2x=0$

$\therefore$ $x=12$

$x=12$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2}=-2<0$

इसलिए संख्याओं का गुणनफल उच्चतम होगा जब संख्या $x=12$ होगी और $24-12=12$ इसलिए संख्याए 12 और 12 है।

15. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\log|\cos x|$ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर ह्रासमान और $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में निरन्तर वर्धमान है।

Ans. दिया है, $f(x)=\log(\cos x)$

$\Rightarrow$ $f'(x)=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x$ (x के सापेक्ष अवलन करने पर)

अंतराल $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में, $\tan x>0$ ($\because \tan x$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\Rightarrow$ $-\tan x<0$ ($\because \tan x$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\therefore \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में , $f'(x)<0$

अतः $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में f निरन्तर ह्रासमान है।

अब अंतराल $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में $\tan x < 0$

$\Rightarrow$ $-\tan x > 0$ ($\because \tan x$ द्वितीय चतुर्थांश में है)

$\therefore \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में $f'(x) > 0$

इसलिए, $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में f निरन्तर वर्धमान है।

16. सिद्ध कीजिए कि R में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।

Ans. दिया है, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$f'(x) = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 3(x-1)^2$

$x \in R$ में $(x-1)^2 > 0$, क्योंकि एक पूर्ण वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

अतः R पर $f'(x) > 0$ इसलिए, दिया गया फलन f वर्धमान फलन है।

17. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log\sin x, \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर वर्धमान और $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में निरन्तर ह्रासमान है।

Ans. दिया है, $f(x) = \log(\sin x)$

$f'(x) = \frac{1}{\sin x}(\cos x) = \cot x$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

अंतराल $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में, $f(x) = \cot x > 0$

क्योंकि $\cot x$ प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक होता है।

$\therefore \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में f निरन्तर वर्धमान है।

अंतराल $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में, $f'(x) = \cot x < 0$

क्योंकि $\cot x$ द्वितीय चतुर्थांश में ऋणात्मक है।

$\therefore \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ पर f निरन्तर ह्रासमान है।

18. a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल $(1,2)$ में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत फलन निरन्तर वर्धमान है।

सबसे पहले, हम $f'(x)$ ज्ञात करते है, तब $1 < x < 2$ के लिए, $f'(x) > 0$ रखकर a का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया है, $f(x) = x^2 + ax + 1$ $\Rightarrow f'(x) = 2x + a$

अंतराल (1, 2) में, $1 < x < 2 \Rightarrow 2 < 2x < 4$

$\Rightarrow (2+a) < (2x+a) < (4+a)$

अतः $f(x)$ निरंतर वर्धमान फलन है, तब $(2+a) > 0$ [$(2x+a) > (2+a)$ के लिए, $f'(x) > 0$]

$\therefore (2+a) > 0 \Rightarrow a > -2$ इसलिए, a का न्यूनतम मान $a = -2$

19. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन f निरंतर वर्धमान या ह्रासमान है।

(i) $f(x)=x^2+2x+5$ (ii) $f(x)=10-6x-2x^2$

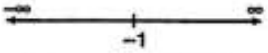
Ans. (i) मान लीजिए कि $f(x)=x^2+2x+5$

$\therefore$ $f'(x)=2x+2=0$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$f'(x)=0$ रखने पर,

$\Rightarrow$ $\Rightarrow 2x=-2, x=-1$

$x=-1$ वास्तविक रेखा को दो अंतराल $(-\infty,-1)$ और $(-1,\infty)$ में विभाजित करती है



अंतराल	$f(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty,-1)$	- ve	निरंतर ह्रासमान
$(-1,\infty)$	+ ve	निरंतर वर्धमान

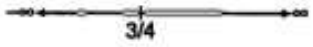
अतः जब $x>-1$ तो $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और जब $x<-1$, तो $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है

(ii) मान लीजिए $f(x)=10-6x-2x^2$

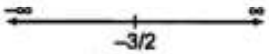
$\Rightarrow$ $f'(x)=0-6-2\cdot 2x=-6-4x$

$f'(x)=0$ रखने पर,

$$-6-4x=0, \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$$



जो वास्तविक रेखा को दो अंतराल $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ और $\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$ में विभाजित करता है।



अंतराल	$f(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$	- ve	निरंतर वर्धमान
$\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$	- ve	निरंतर ह्रासमान

इसलिए, $x<-\frac{3}{2}$ के लिए f निरंतर वर्धमान है और $x>-\frac{3}{2}$ के लिए f निरंतर ह्रासमान है

20. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 सेमी है।

Ans. मान लीजिए कि गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या r और आयतन V है।

तब, $r=10$ सेमी और $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

त्रिज्या r के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर $\frac{dV}{dr}=\left(\frac{4}{3}\pi\right)3r^2$ (r के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$=4\pi r^2=4\pi(10)^2=400\pi$ ($\because r=10$ सेमी)

अतः गुब्बारे का आयतन 400π सेमी^{3}/सेमी की दर से बढ़ रहा है।

21. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंधित कुल लागत $c(x)$ (रुपये में) $c(x)=0.007x^3-0.003x^2+15x+4000$ से प्रदत है।

सीमांत लागत ज्ञात कीजिए, जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है।

सीमांत लागत परिणाम के सापेक्ष कुल लागत के परिवर्तन की दर है।

Ans. सीमांत लागत $=\frac{dc}{dt}$

$\frac{dc}{dt}=0.007(3x^2)-0.003(2x)+15=0.021x^2-0.006x+15$

जब $x=17$, सीमांत लागत $=0.021(17)^2-0.006(17)+15$

$=0.021(289)-0.006(17)^2+15=6.069+0.102+15=20.967$

अतः जब 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है, तो सीमांत लागत 20.967 रुपये है।

22. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में $R(x)=13x^2+26x+15$ से प्रदत है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x=7$ है।

सीमांत आय इकाइयों की संख्या के विक्रय के सापेक्ष कुल आय के परिवर्तन की दर है।

Ans. सीमांत आय $=\frac{dR}{dx}=\frac{d}{dx}\left(13x^2+26x+15\right)=13\times 2x+26=26x+26$

जब $x=7$, तो सीमांत आय $=26(7)+26=182+26=208$

अतः सीमांत आय 208 रुपये है।

23. सिद्ध कीजिए $f(x)=\sin x$ से प्रदत फलन

(i) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है। (ii) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान

(iii) $(0,\pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

Ans. दिया गया फलन $f(x)=\sin x$ है।

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x)=\cos x$$

(i) अतः प्रत्येक $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए $\cos x > 0$ ($\therefore \cos x$ प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक है)

$f'(x) > 0$

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है।

(ii) अतः, प्रत्येक $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ के लिए $\cos x < 0$ ($\therefore \cos x$ द्वितीय चतुर्थांश में धनात्मक है)

$f'(x) < 0$

इसलिए, $f, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(iii) जब $x \in (0, \pi)$ हम देखते है कि $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x) > 0$ और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में $f'(x) < 0$

इसलिए $f'(x), (0, \pi)$ में धनात्मक और ऋणात्मक है।

इसलिए $(0, \pi)$ में $f(x)$ न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

24. एक आयत की लम्बाई x,5 सेमी/मिनट की दर से घट रहा है और चौड़ाई y,4 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है। जब $x = 8$ सेमी और $y = 6$ सेमी है, तब आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

Ans. मान लीजिए कि किसी समय t पर, आयत की लम्बाई, चौड़ाई, परिमाप और क्षेत्रफल क्रमशः x, y, P और A है, तब $P = 2(x + y)$ और $A = xy$ 1

आयत का परिमाप $= 2$(लम्बाई + चौड़ाई) और क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

यह दिया है कि $\frac{dx}{dt} = -5$ सेमी/मिनट ($-ve$ चिन्ह दर्शाता है कि लम्बाई घट रही है)

और $\frac{dy}{dt} = 4$ सेमी/मिनट

(a) अब, $P = 2(x + y)$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

परिमाप के परिवर्तन की दर $\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$

$= 2(-5 + 4)$ सेमी/मिनट $= -2$ सेमी/मिनट $\left(\therefore \frac{dx}{dt} = -5 \,\&\, \frac{dy}{dt} = 4\right)$

अतः, आयत का परिमाप 2 सेमी/मिनट की दर से घट ($-ve$ चिन्ह) रहा है।

(b) यहां, आयत का क्षेत्रफल $A = xy$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर $\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dA}{dt} = 8\times 4 + 6\times(-5) \qquad \left(\therefore \frac{dx}{dt} = -5 \,\&\, \frac{dy}{dt} = 4\right)$$

$$-32 - 30 = 2 \text{ सेमी}^2 / \text{मिनट}$$

अतः, आयत का क्षेत्रफल 2 सेमी^{2} / मिनट की दर से बढ़ रही है।

नोट– यदि परिवर्तन की दर बढ़ रही है, तो हम $(+ve$ चिन्ह) लेते है और यदि परिवर्तन की दर घट रही है तो हम $(-ve$ चिंन्ह) लेते है।

25. एक परिवर्तनशील घन की कोर 3 सेमी / से की दर से बढ़ रही है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है, जबकि कोर 10 सेमी लम्बी है?

Ans. मान लीजिए घन की कोर की लम्बाई x है, और आयतन V है, तब $V = x^3$

$\therefore$ समय के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = 3x^2\frac{dx}{dt} \qquad \text{(श्रृंखला नियम से)}$$

यह दिया गया है कि घप की कोर 3 सेमी / से की दर से बढ़ रही है।

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dt} = 3 \text{ सेमी / से} \qquad \therefore \frac{dV}{dt} = 3x^2(3) = 9x^2 \text{ सेमी}^3 / \text{से}$$

इसलिए, जब $x = 10$ सेमी, $\frac{dV}{dt} = 9\times(10)^2 = 900$

अतः जब कोर की लम्बाई 10 सेमी है, तो घन का आयतन 900 सेमी^{3} / से की दर से बढ़ रहा है।

26. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए।

$f(x) = |x+2| - 1$

Ans. दिया गया फलन $f(x) = |x+2| - 1$

हम जानते है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $|x+2| \geq 0$

इसलिए, प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $f(x) = |x+2| - 1 \geq -1$

f का न्यूनतम मान तभी ज्ञात किया जा सकता है जब $|x+2| = 0$

अर्थात $|x+2| = 0 \Rightarrow x = -2$

$\therefore f$ का न्यूनतम मान $= f(-2) = |-2+2| - 1 = 0 - 1 = -1$

इसलिए, $f(x)$ का न्यूनतम मान -1 है लेकिन $x = 2$ पर कोई उच्चतम मान नहीं है।

अध्याय – 7
समाकलन

अंकभार (1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 12)

बहुकिकल्पीय प्रश्न :–

1. $\int \log_{10} x \, dx$ का मान है?

(1) $x \log x - x + c$ (2) $\frac{1}{x}$ (3) $\log_e 10(x \log x - x + c)$ (4) $\log_{10} e(x \log x - x) + c$

2. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रतिअवकलन है?

(1) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{x} + c$ (2) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + c$ (3) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$ (4) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + c$

3. $\int a^x \, da$ का मान है?

(1) $a^x \log a + c$ (2) $\frac{a^x}{\log a} + c$ (3) $\frac{a^{x+1}}{x+1} + c$ (4) $x \, a^{x-1} + c$

4. $\int \log_x x \, dx$ का मान है?

(1) 1 (2) 0 (3) $x + c$ (4) c

5. $\int \sin x^o dx$ बराबर है?

(1) $\frac{180}{\pi}\cos x^o + c$ (2) $-\frac{180}{\pi}\cos x^o$ (3) $-\frac{180}{\pi}\cos x + c$ (4) $-\frac{180}{\pi}\cos x^o + c$

6. $\frac{d}{dx}[f(x)] = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ तथा $f(2) = 0$ तब $f(x)$ है?

(1) $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$ (2) $x^3 + \frac{1}{x^4} + \frac{129}{8}$ (3) $x^4 + \frac{1}{x^3} + \frac{129}{8}$ (4) None of these

7. $\int \frac{dx}{x + x\log x}$ का मान है?

(1) $(1 + \log x) + c$ (2) $\log_{10}(1 + \log x) + c$ (3) $\log_e(1 + \log x) + c$ (4) $\log_e(\log x) + c$

8. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right)dx$ है?

(1) 1 (2) 0 (3) -1 (4) $\frac{\pi}{4}$

9. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1)dx$ है?

(1) 0 (2) 2 (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

10. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान है?

(1) 0 (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

11. $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx$ है?

(1) $e^x \cos x + c$ (2) $e^x \sin x + c$ (3) $e^x \sec x + c$ (4) $e^x \tan x + c$

12. $\int \cos^2 2x \, dx$ है?

(1) $\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x + c$ (2) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 4x + c$ (3) $x+\frac{1}{8}\sin 4x + c$ (4) $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x + c$

13. $\int \frac{\text{cosec}^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} dx$ का मान है

(1) $-\cot\frac{x}{2} - x + c$ (2) $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - x + c$ (3) $-2\cot\frac{x}{2} - x + c$ (4) $2\cot\frac{x}{2} - x + c$

14. $f(a+b-x) = f(x)$ तब $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ है?

(1) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(a+b+c)dx$ (2) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ (3) $\frac{a-b}{2}\int_a^b f(x)dx$ (4) $\frac{a+b}{4}\int_a^b f(x)dx$

Answer Key							
Qus. 1	2	3	4	5	6	7	8
Ans. 4	**3**	**3**	**3**	**4**	**1**	**3**	**2**
Qus. 9	10	11	12	13	14		
Ans. 4	**3**	**3**	**1**	**3**	**2**		

रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \cos^2 2x}$ का मान ..... है

2. $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ का मान ..... है।

3. $\int \sqrt[3]{x^5} dx$ का मान ..... है।

4. $\int 5^{-\log_5 x} dx$ का मान..... है।

5. $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx$ का मान ..... है।

6. $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ का मान..... है।

7. $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$ का मान ..... है।

8. यदि f एक विषम फलन है तब $\int_{-5}^{5} f(x)dx =$ ..... होगा।

9. $\int_{6}^{1} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}dx =$..... है।

10. $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}\right)dx$ का मान..... है।

–: उत्तरमाला :–

1. $\frac{1}{2}[\tan 2x - \cot 2x] + C$ या $\log(\cos ec 4x - \cot 4x) + C$
2. 0
3. $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C$
4. $-\frac{1}{x} + C$
5. $\tan x - \sec x + c$
6. $\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$
7. $\frac{1}{1+\cos x} + c$
8. 0
9. $\frac{\pi^2}{32}$
10. log 2

अतिलघुतरात्मक प्रश्न :–

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - x}$ का हल ज्ञात करो?

Sol. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} - x}$

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$

$1 - \sqrt{x} = t$

$-\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$

$I = -2\int \frac{dt}{t}$

$I = -2\log t + c$

$I = -2\log(1-\sqrt{x}) + c$

$I = \frac{2}{\log(1-\sqrt{x})} + c$

2. $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{2}{x}dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. $I = \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{2}{x}dx$

$I = 2[\log x]_1^{\sqrt{2}}$

$I = 2[\log\sqrt{2} - \log(1)]$

$I = 2\log\sqrt{2} - 0$

$\boxed{I = \log 2}$

3. $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ का मान है?

हल:– $I = \int \frac{dx}{e^x - \frac{1}{e^{-x}}}$

$I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$

माना $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$I = \int \frac{dt}{t^2 + 1}$

$= \tan^{-1}(t) + c$

$= \tan^{-1}(e^x) + c$

4. $I = \int \frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}dx$ का घन हैं?

हल:– $I = \int \frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}dx$

माना $3\cos x + 2\sin x = t$

$(-3\sin x + 2\cos x)dx = dt$

$I = \int \frac{dt}{2t}$

$I = \frac{1}{2}\log(t) + c$

$I = \frac{1}{2}\log(3\cos x + 2\sin x) + c$

5. $I = \int \cos(\sin^{-1} x)dx$ का मान है?

हल:– माना $\sin^{-1} x = \theta$

$\Rightarrow x = \sin\theta$ तब $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

$I = \int \cos\left[\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\right]dx$

$I = \int\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx$

$I = \boxed{\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x + c}$

6. $I = \int_0^{\pi}\left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right)dx$ का मान है?

हल:– $I = \int_0^{\pi} -\left(\cos^2\frac{x}{9} - \sin^2\frac{x}{2}\right)dx$

$I = -\int_0^{\pi}\cos x\ dx$

$I = -[\sin x]_0^{\pi}$

$I = -\sin\pi + \sin o = 0$

7. $\int\sqrt{\left(1+\cos\frac{x}{4}\right)}\ dx$

हल:– $\int\sqrt{2\cos^2\left(\frac{x}{8}\right)}\ dx$

$= \sqrt{2}\int\left(\cos\frac{x}{8}\right)\ dx$

$= \sqrt{2}\times 8\sin\frac{x}{8} + c$

$= 8\sqrt{2}\sin\frac{x}{8} + c$

8. $I = \int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

हल:– $I = \int\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$= \int\tan^2\frac{x}{2}dx$

$= \int\left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right)dx$

$= \boxed{2\tan\frac{x}{2} - x + c}$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\ dx$

हल:– $= [\log\sec\ x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \log\left(\sec\frac{\pi}{4}\right) - \log(\sec 0)$

$= \log\left(\sqrt{2}\right) - \log(1)$

$= \frac{1}{2}\log 2$

लघुउत्तरीय प्रश्न :–

1. $\int\frac{dx}{2x-x^2}$ का मान ज्ञात करें?

Sol. $I = \int\frac{dx}{2x-x^2}$

$I = \int\frac{dx}{-\left[x^2-2x+1-1\right]}$ (पूर्ण वर्ग बनाने पर)

$I = \int\frac{dx}{-\left[(x-1)^2-1\right]}$

$I = \int\frac{dx}{1-(x-1)^2}$

$\boxed{I = \sin^{-1}(x-1) + c}$

2. $\int a^{\log_a(\sin^2 x)}dx$ का मान ज्ञात करों?

Sol. $I = \int a^{\log_a(\sin^2 x)}dx$

$I = \int \sin^2 x\ dx$ (सूत्र $e^{\log_e x} = x$)

$I = \int\left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]dx$

$I = \frac{1}{2}\int 1\ dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx$

$I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sin 2x}{2} + c$

$\boxed{I = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c}$

3. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. $I = \int\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

$I = \int\frac{e^x\left[e^x - e^{-x}\right]}{e^x\left[e^x + e^{-x}\right]}dx$

$I = \int\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

माना $e^x + e^{-x} = t$

$\Rightarrow \left(e^x - e^{-x}\right)dx = dt$

अतः $I = \int\frac{dt}{t}$

$I = \log t + c$

$\boxed{I = \log\left(e^x + e^{-x}\right) + c}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ का मान है?

Sol. माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

माना $\cos x = t$

$-\sin x\ dx = dt$

यदि $x = 0$ तब $t = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$ तब $t = 0$

अतः $I = -\int_1^0\frac{dt}{1+t^2}$

$I = -\left[\tan^{-1} t\right]_1^0$

$I = -\left[\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 1\right]$

$I = -\left[0 - \frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$

5. $\int\frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos\alpha}dx$

$\int\frac{(2\cos^2 x - 1) - (2\cos^2\alpha - 1)}{\cos x - \cos\alpha}dx$

$2\int\frac{(\cos x + \cos\alpha) - (\cos x - \cos\alpha)}{(\cos x - \cos\alpha)}dx$

$2\int(\cos x + \cos\alpha)dx$

$2\sin x + 2x\cos\alpha + c$

6. $I = \int\frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$

$= \int\frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}dx$

$= \int e^x\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$

सुत्र – $\int e^x\left[f(x) + f^1(x)\right]dx = e^x f(x) + c$

अतः– $I = \frac{e^x}{1+x} + c$

7. $I = \int_0^1 x\ e^{x^2}dx$

हलः– माना $x^2 = t \Rightarrow 2x\ dx = dt$

अब $x = 0$ पर $t = 0$ तथा $x = 1$ पर $t =$

$I = \frac{1}{2}\int_0^1 et\ dt$

$$I = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_1^0$$

$$= \frac{1}{2}[e-1] + c$$

8. $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx$

हलः– $\sin^2 x$ एक सम फलन है।

अतः– $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x + x$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$I = \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} - (0-0)$$

$$= \boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

दीर्घउत्तरीय प्रश्नः–

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)} dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$

माना $\sin x = t$

अतः $\cos x \, dx = dt$

यदि $x = 0$ तब $t = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ तब $t = 1$

अतः $I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(2+t)}$

आंशिक भिन्नों में वियोजित करने पर

$$\frac{1}{(1+t)(2+t)} = \frac{A}{(1+t)} + \frac{B}{(2+t)}$$

$\Rightarrow 1 = A(2+t) + B(1+t)$

$t = -1$ पर $\boxed{A = 1}$

$t = -2$ पर $\boxed{B = -1}$

अतः $I = \int_0^1 \left[\frac{1}{(1+t)} - \frac{1}{(2+t)}\right] dt$

$I = \left[\log(1+t) - \log(2+t)\right]_0^1$

$I = (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2)$

$I = 2\log 2 - \log 3$

$I = \log 4 - \log 3$

$\Rightarrow \boxed{I = \log\frac{4}{3}}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+8x-x^2}}$ का मान ज्ञात करो?

Sol. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9+8x-x^2}}$

पूर्ण वर्ग बनाने पर

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[x^2-8x-9\right]}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2-8x-9+16-16]}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[(x-4)^2-25\right]}}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(5)^2-(x-4)^2}}$$

अतः $\boxed{I = \sin^{-1}\left(\frac{x-4}{5}\right) + c}$

3. $\int \frac{\cos 2x \quad dx}{(\cos x + \sin x)^2}$ का मान ज्ञात करो?

Sol. माना $I = \int \frac{\cos 2x \ dx}{(\cos x + \sin x)^2}$

$I = \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)dx}{(\cos x + \sin x)^2}$

$I = \int \frac{(\cos x + \sin x)\,(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} dx$

$I = \int \frac{(\cos x - \sin x)\,dx}{(\cos x + \sin x)}$

माना $\cos x + \sin x = t$

$\Rightarrow (-\sin x + \cos x)\, dx = dt$

अतः $I = \int \frac{dt}{t}$

$I = \log t + c$

$\boxed{I = \log(\cos x + \sin x) + c}$

4. $\int \frac{dx}{\left(e^x - 1\right)}$ का मान ज्ञात करें?

हलः– $I = \int \frac{dx}{\left(e^x - 1\right)}$

$I = \int \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x - 1\right)}$

माना $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$I = \int \frac{dt}{t(t-1)}$

$I = \int \frac{dt}{t^2 - t}$

$I = \int \frac{dt}{t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}$

$I = \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$I = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \log\left[\frac{t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right] + C$

$I = \log\left[\frac{t-1}{t}\right] + C$

$I = \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right) + C$

नोटः– इस सवाल को आंशिक भिन्न द्वारा भी हल कर सकते है।

5. समाकलन $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ को हल कीजिए–

हलः– $I = \int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

माना $\sin^{-1} x = t$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$ तब $x = \sin t$

अतः $\int t \quad \sin t \ dt$

$I = t \times (-\cos t) - \int (1 \times -\cos t) dt$

$I = -t\cos t + \sin t + c$

$I = -\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + x + c$

6. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}}$ का मान होगा।

हलः– माना $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\cot x}}$

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ ——— समीकरण (1)

P_3 गुणधर्म लगाने पर

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$ ——— समीकरण (2)

समीकरण (1) + समीकरण (2) से –

$$2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1)dx$$

$$2I = \left[x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$2I = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{12}$$

7. $\int_0^4 |x-1|\,dx$ ज्ञात कीजिए–

हलः– $\int_0^4 |x-1|\,dx \qquad |x-1| = \begin{cases} -(x-1) & x \\ (x-1) & x \end{cases}$

अतः– $f(x) = \int_0^1 -(x-1)dx + \int_1^4 (x-1)dx$

$$I = -\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^4$$

$$I = -\left[\left(\frac{1}{2} - 1\right) - 0\right] + \left[\left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2} + \left[4 + \frac{1}{2}\right] = 5$$

निम्बन्धात्मक प्रश्न :–

1. सिद्ध कीजिए $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

Sol. माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$ ———— (1)

गुणधर्म P_4 लगाने पर

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1 + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1 + \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{2}{1+\tan x}\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\log 2 - \log(1+\tan x)\right]dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$$

$I = \log 2\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I$ समीकरण (1) से

$$2I = \log 2\left[\frac{\pi}{4} - 0\right]$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{8}\log 2}$$

2. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. $I = \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx$ ———— (1)

गुणधर्म P_4 लगाने पर

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{a^2\cos^2(\pi-x) + b^2\sin^2(\pi-x)}$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - \int \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$\because \int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

यदि $F(2a - x) = F(x)$

अतः यहाँ $F(x) = \dfrac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

$F(\pi - x) = \dfrac{1}{a^2\cos^2(\pi - x) + b^2\sin^2(\pi - x)}$

$\Rightarrow F(\pi - x) = \dfrac{1}{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 x}$

$= F(x)$

अतः $2I = \pi \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 x}$

$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec^2 x\ dx}{a^2 + b^2\tan^2 x}$

($\cos^2 x$ का अंश व हर में भाग लगाने पर)

माना $b\tan x = t$ यदि $x = 0$ तब $t = 0$

$\Rightarrow b\sec^2 x\, dx = dt \quad x = \dfrac{\pi}{2}$ तब $t = \infty$

अतः $I = \dfrac{\pi}{b}\int_0^{\infty} \dfrac{dt}{a^2 + t^2}$

$I = \dfrac{\pi}{b} \times \dfrac{1}{a}\left[\tan^{-1}\dfrac{t}{a}\right]_0^{\infty}$

$I = \dfrac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0\right]$

$I = \dfrac{\pi}{ab}\left[\dfrac{\pi}{2} - 0\right]$

$I = \dfrac{\pi^2}{2ab}$

3. समाकलन $\int_0^{\pi} \dfrac{x\tan x\, dx}{\sec x + \tan x}$ का मान ज्ञात करो?

Sol. माना $I = \int_0^{\pi} \dfrac{x\tan x\, dx}{\sec x + \tan x}$

$I = \int_0^{\pi} \dfrac{x\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}}$

$I = \int_0^{\pi} \dfrac{x\sin x}{1 + \sin x} dx$ ——— (1)

P_4 गुणधर्म लगाने पर

$I = \int_0^{\pi} \dfrac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1 + \sin(\pi - x)} dx$

$I = \int_0^{\pi} \dfrac{(\pi - x)\sin x}{1 + \sin x} dx$

$I = \pi\int_0^{\pi} \dfrac{\sin x\ dx}{1 + \sin x} - \int_0^{\pi} \dfrac{x\sin x\, dx}{1 + \sin x}$

$I = \pi\int_0^{\pi} \dfrac{\sin x\ dx}{1 + \sin x} - I$

$2I = \pi\int_0^{\pi} \dfrac{\sin x\ dx}{1 + \sin x}$

$2I = \pi\int_0^{\pi} \dfrac{\sin x(1 - \sin x)dx}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$

$2I = \pi\int_0^{\pi} \dfrac{(\sin x - \sin^2 x)dx}{1 - \sin^2 x}$

$2I = \pi\int_0^{\pi} \dfrac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

$2I = \pi\int_0^{\pi} \left[\sec x\tan x - \tan^2 x\right] dx$

$2I = \pi\int_0^{\pi} \left[\sec x\tan x - \sec^2 x + 1\right] dx$

$2I = \pi\left[\sec x - \tan x + x\right]_0^{\pi}$

$2I = \pi\left[\sec\pi - \tan\pi + \pi\right] - \pi\left[\sec 0 - \tan 0 + 0\right]$

$2I = \pi\left[-1 - 0 + \pi\right] - \pi\left[1 - 0 + 0\right]$

$2I = -\pi + \pi^2 - \pi$

$2I = \pi^2 - 2\pi$

$\boxed{I = \dfrac{\pi^2}{2} - \pi}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx$ का मान ज्ञात करो?

हलः– माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx$ ———— समीकरण (1)

R_1 गुणधर्म लगाने पर

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x\ dx \text{ ————————— समीकरण (2)}$$

समीकरण 1 + समीकरण 2 से –

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\sin x\cos x\right)dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\sin 2x\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\log 2)dx$$

$$2I=I_1-\frac{\pi}{2}\log 2$$

अब = $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)dx$

माना $2x=t\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\log\sin t)dt \qquad \left|\begin{array}{l} x=0 \text{ पर } t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \text{ पर } t=\pi \end{array}\right.$$

P_6 गुणधर्म $\int_0^{2a}f(x)dx=2\int_0^{a}f(x)dx$

यदि $f(2a-x)=f(x)$

अतः $I_1=\frac{1}{2}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\ t\,dt$

चर t को x में लिखने पर

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\ dx=I$$

अतः $2I=I-\frac{\pi}{2}\log 2$

$$\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}\log 2=\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

5. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ का मान ज्ञात करों?

हलः– माना $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

x के निष्कासन नियम से –

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

माना $\cos x=t$ तथा $x=0$ पर $t=1$

$-\sin x\ dx=dt$ $\quad x=\pi$ पर $t=-1$

$$I=-\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$I=-\frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1}\right]_1^{-1}$$

$$I=-\frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1}(-1)-\tan^{-1}1\right]$$

$$I=-\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$I=\frac{-\pi}{2}\times\frac{-\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$$

6. $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\sin(x+\alpha)}}$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\ [\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha}}$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^4 x\ [\cos\alpha+\cot x\sin\alpha}}$$

$$I=\int\frac{\cos ec^2x\ dx}{\sqrt{\cos\alpha+\cot x\sin\alpha}}$$

माना :–

$\cos\alpha+\cot x\sin\alpha=1$

$\Rightarrow -\sin\alpha\ \cos ec^2x\ dx=dt$

$$I=-\frac{1}{\sin\alpha}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$I=-\frac{1}{\sin\alpha}\times 2\sqrt{t}+c$$

$$I = \frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\cos\alpha + \cot x \sin\alpha} + c$$

$$I = \frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\cos\alpha + \frac{\cos x}{\sin x}\sin\alpha} + c$$

$$I = \frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha}{\sin x}} + c$$

$$I = \frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}} + c$$

7. $\int \frac{(2\sin\theta - 2)\cos\theta \ d\theta}{5 - \cos^2\theta - 4\sin\theta}$ का मान ज्ञात करो?

हलः– माना $I = \int \frac{(2\sin\theta - 2)\cos\theta \ d\theta}{5 - \cos^2\theta - 4\sin\theta}$

$$I = \int \frac{(2\sin\theta - 2)\cos\theta \ d\theta}{5 - 1 + \sin^2\theta - 4\sin\theta}$$

माना $\sin\theta = t$

$\Rightarrow \cos\theta \ d\theta = dt$

$$I = \int \frac{(3t-2)}{t^2 - 4t + 4}$$

$$I = \int \frac{(3t-2)}{(t-2)^2} dt$$

आंशिक भिन्न में नियोजित करने पर

$$= \frac{3t-2}{(t-2)^2} = \frac{A}{(t-2)} + \frac{B}{(t-2)^2}$$

$$= \boxed{(3t-2) = A(t-2) + B}$$

$t = 0$ पर $-2 = -2A + B$

$t = 2$ पर $4 = B$

अतः $A = 3$

अत : $I = 3\int \frac{dt}{(t-2)} + 4\int \frac{dt}{(t-2)^2}$

$$I = 3\log|(t-2)\frac{-4}{(t-2)} + c$$

$$\boxed{I = 3\log(\sin\theta - 2) - \frac{4}{(\sin\theta - 2)} + C}$$

8. $\int_0^{\pi} \frac{x \ dx}{1 + \sin x}$ को हल कीजिए–

हलः– माना $I = \int_0^{\pi} \frac{x \ dx}{1 + \sin x}$

x का निष्कासन करने पर

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x}$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \left[\sec^2 x - \tan x \sec x\right] dx$$

$$I = \frac{\pi}{2}\left[\tan x - \sec\pi\right]_0^{\pi}$$

$$I = \frac{\pi}{2}\left[\left(\tan x - \sec\pi\right) - \left(\tan\theta - \sec\theta\right)\right]$$

$$I = \frac{\pi}{2}\left[(0+1) - (0-1)\right]$$

$$= \boxed{I = \pi}$$

अध्याय – 8
क्षेत्रकलन

अंकभार (1 + 1 + 2 + 2 = 6)

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. वक्र $y = x^2$ तथा रेखा $y = 4$ के बीच का प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्रफल है?

(1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{64}{3}$ (3) $\frac{16}{3}$ (4) $\frac{8}{3}$

2. रेखा $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ तथा निर्देशी अक्षों के बीच का क्षेत्रफल है?

(1) 6 (2) 3 (3) 12 (4) $\frac{3}{2}$

3. वृत $x^2 + y^2 = 2$ का $x-$अक्ष के ऊपर का क्षेत्रफल है?

(1) 2π (2) π (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) 4π

4. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=2$ का x-अक्ष के ऊपर का क्षेत्रफल है?

(1) 2π (2) $\sqrt{2}\pi$ (3) 4π (4) $\sqrt{\pi}$

5. वक्र $y^2 = 4x$, $y-$अक्ष रेखा $y = 3$ से घिरा क्षेत्रफल है?

(1) 2 (2) $\frac{9}{4}$ (3) $\frac{9}{3}$ (4) $\frac{9}{2}$

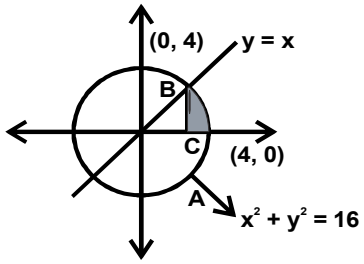
6. अन्तराल $[a,b]$ में दो वक्र $y = f(x)$ तथा $y = g(x)$ है तथा $f(x) \le g(x)$ तथा $x = a, x = b$ के मध्य इन वक्रो से घिरा क्षेत्रफल है?

(1) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ (2) $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$ (3) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx$ (4) $\int_a^b [f(x)\ g(x)]dx$

7. $x = 0$ से $x = \pi$ तक वक्र $y = \sin x$ के बीच क्षेत्रफल है?

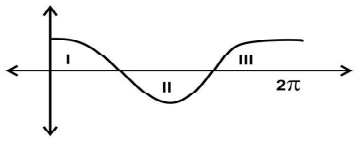
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

8.



इस चित्र में छांयाकित भाग का क्षेत्रफल है?

(1) $\int_2^4 \sqrt{16-x^2}dx$ (2) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$ (3) $\int_{2\sqrt{2}}^4 \sqrt{16-x^2}dx$ (4) $\int_{\sqrt{2}}^4 \sqrt{16-x^2}dx$

9. 

निम्न में से किस भाग का क्षेत्रफल आंकिक रूप से ऋणात्मक आयेगा।

(1) I (2) II (3) III (4) None

ANSWER KEY								
Qus. 1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ans. 3	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**2**

रिक्त स्थान की पूर्ति करें–

1. वक्र $y = x^3, x$ – अक्ष एंव कोटियो $x = -2, x = 0$ तक क्षेत्रफल ..... है।
2. वक्र $y = x^2$ तथा रेखा $y = 4$ के बीच का क्षेत्रफल है।
3. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 2$ का x – अक्ष के ऊपर का क्षेत्रफल..... है।

–: उत्तरमाला :–

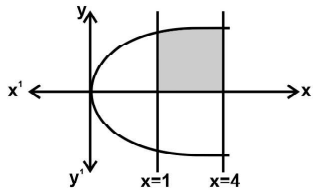
(1) 4 वर्ग इकाई

(2) $\frac{32}{3}$ वर्ग इकाई

(3) $2\sqrt{6}\pi$ वर्ग इकाई

अतिलघुत्रात्मक प्रश्न

1. वक्र $y^2 = x$ रेखाओं $x = 1, x = 4$ और x–अक्ष के बीच प्रथम चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात करों।



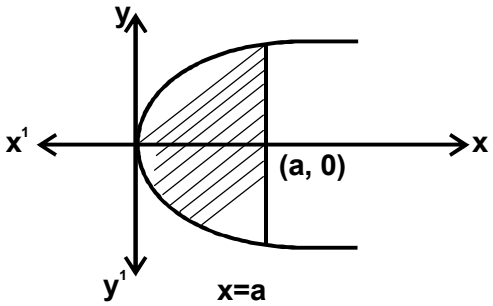
हलः– क्षेत्रफल $= \int_1^4 y\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

$$= \frac{2}{3}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

2. परवलय $y^2 = 4ax$ एवं इसके नाभिलम्ब के बीच का क्षेत्रफल है?



हलः–

परवलय की नाभि (a, 0) होती है।

अभिष्ठ क्षेत्रफल $= 2\times\int_0^a ydx$

$$=2\times\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}dx$$

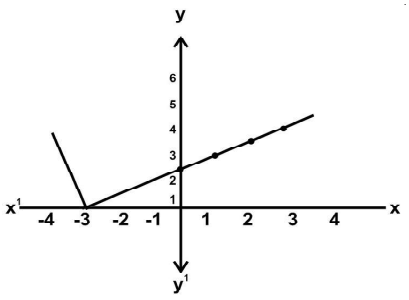
$$= 4\sqrt{a}\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{8\sqrt{a}}{3}\left[a\sqrt{a}-0\right]=\frac{8a^2}{3}$$ वर्ग इकाई

3. $y=|x+3|$ का ग्राफ खीचीएः–

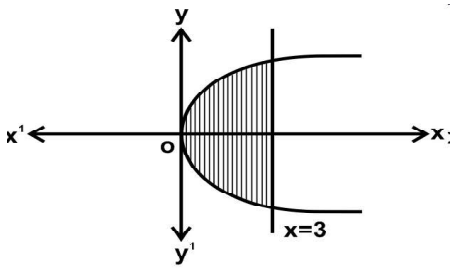
हलः– $y=|x+3|$

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	-4
y	3	4	5	6	2	1	0	1



4. वक्र $y^2 = 4x$ एंव रेखा $x = 3$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करो?

हलः–



अभिष्ठ क्षेत्रफल $= 2x\int_0^3 ydx$

{ ∴ परवलय $y^2 = 4x$, y – अक्ष के सापेक्ष सममित है।}

$$= 2x\int_0^3 2\sqrt{x}dx$$

$$= 4\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

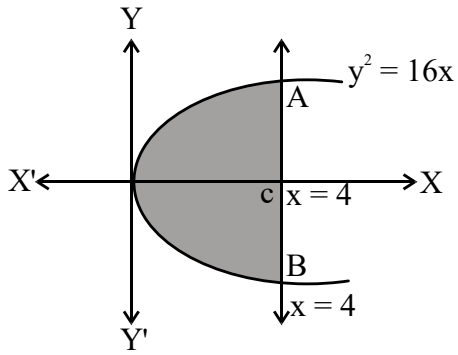
$$= \frac{8}{3}\times[3\sqrt{3}-0]$$

$= 8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

लघुतरात्मक प्रश्न

1. परवलय $y^2 = 16x$ तथा रेखा $x = 4$ से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करो?

Sol. चित्र बनाने पर



अभीष्ठ क्षेत्रफल = OABO का क्षेत्रफल

$= 2\times$ OACO का क्षेत्रफल

$$= 2\times\int_0^4 y\,dx$$

$$= 2\times\int_0^4 4\sqrt{x}\,dx$$

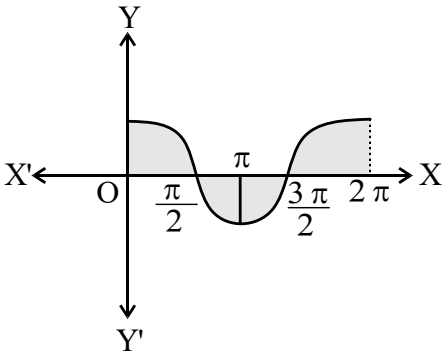
$$= 8\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4$$

$$= \frac{16}{3}\left[4^{3/2}-0\right]$$

$$= \frac{16}{3}\times 8 = \frac{128}{3}$$ वर्ग इकाई

2. $x=0$ से $x=2\pi$ के मध्य वक्र $y=\cos x$ से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करो?

Sol.



वक्र $y=\cos x$ का $x=0$, से $x=2\pi$ के बीच क्षेत्रफल छायांकित है –

अभिष्ठ क्षेत्र $= 4\times\int_0^{\pi/2} y\,dx$

$$= 4\times\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$$

$$= 4\left[\sin x\right]_0^{\pi/2}$$

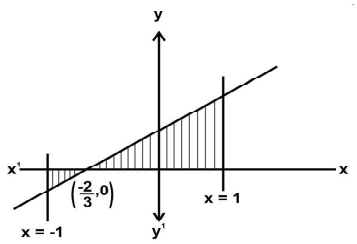
$$= 4\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right]$$

$= 4$ वर्ग इकाई

3. रेखा $y=3x+2$, x–अक्ष एंव कोटियों $x=-1$ एवं $x=1$ के बीच क्षेत्रफल ज्ञात करों।

(1) व (2) व (3) व (4) व

हलः–



अभिष्ठ क्षेत्रफल $= \left|\int_{-1}^{-\frac{2}{3}}(3x+2)dx\right| + \int_{-\frac{2}{3}}^{1}(3x+x)dx$

{ प्रथम क्षेत्रफल x–अक्ष के नीचे है अतः मांपाक लगाना है।}

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{-\frac{2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= \frac{1}{6}+\frac{25}{6}=\frac{13}{3}$$ वर्ग इकाई

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें

अध्याय – 9
अवकल समीकरण

अंकभार (1 + 1 + 1 + 3 = 6)

1. अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$ की घात है–

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) परिभाषित नहीं है।

Ans. 4

2. अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=0$ की कोटि है–

(1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) परिभाषित नहीं है।

Ans. 1

3. चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है–

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 4

Ans. 4

4. तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है–

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

Ans. 4

5. निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से किस समीकरण का व्यापक हल $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ है–

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ (3) $\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$ (4) $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0$

Ans. 2

6. $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4+3s\frac{d^2s}{dt^2}=0$ निम्नलिखित समीकरण की घात तथा कोटि ज्ञात कीजिए।

Ans. इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि अवकलन $\frac{d^2s}{dt^2}$ है। इसलिए इसकी कोटि 2 है। तथा $\frac{d^2s}{dt^2}$ की अधिकतम घातांक 1 है अतः इस समीकरण की घात 1 है।

7. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ निम्नलिखित समीकरण की घात तथा कोटि ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{d^2y}{dx^2}$ अवकलन की कोटि 2 तथा इस समीकरण का बांया पक्ष अवकलनों में बहुपद नहीं है, इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

8. सत्यापित कीजिए कि फलन $y = a\cos x + b\sin x$ जिसमें $a,b \in R$, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल है।

Ans. दिया हुआ फलन है $y = a\cos x + b\sin x$ 1

समीकरण 1 के दोनों पक्षों को x, के सापेक्ष उत्तरोतर अवकलन करने पर हम देखते है–

$\frac{dy}{dx} = -a\sin x + b\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos x - b\sin x$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ एवं y का मान दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त करते है।

बांया पक्ष $= (-a\cos x - b\sin x) + (a\cos x + b\sin x) = 0$ दायां पक्ष

9. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}, (y \neq 2)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया गया है कि $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}, (y \neq 2)$ 1

समीकरण 1 के चरों को पृथक करने पर हम प्राप्त करते है –

$(2-y)dy = (x+1)dx$ 2

समीकरण 2 के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$\int (2-y)dy = \int (x+1)dx$

अथवा $2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$

अथवा

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2c_1 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + c = 0$

$c = 2c_1$ समीकरण का व्यापक हल है।

10. $y\log ydx - xdy = 0$ अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया है $y\log ydx - xdy = 0$

$y\log ydx = xdy$

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y\log y}$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y\log y}$

यहां $\log y = t$ रखने पर–

$\frac{1}{y}dy = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t}.dt$

$\Rightarrow \log|x| = \log|t| + c_1$

$\log|x| = \log|\log y| + c_1$

$\log|x| - \log|\log y| = c_1$

$\log\left|\frac{x}{\log y}\right| = c_1$

$\frac{x}{\log y} = e^{c_1} = A$ (माना)

$x = A\log y$

$\log y = \frac{1}{A}x = cx$

$y = e^{cx}$ (अभिष्ट हल)

11. $\frac{dy}{dx} = \sin^{-1}x$ अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया है $\frac{dy}{dx} = \sin^{-1}x$ या $dy = \sin^{-1}dx$

$\int dy = \int \sin^{-1}xdx$

$y = \int (\sin^{-1}x).|dx$

$\sin^{-1}x$ को पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$y = \left(\sin^{-1}x\right)x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}xdx$

$y = x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

अब $1-x^2 = t$ रखने पर

$-2xdx = dt$

$y = x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$

$= x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$

$y = x\sin^{-1}x + \sqrt{t} + c$

$y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

12. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$ समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. प्रश्नानुसार –

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$$

$$xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx$$

या $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = f(x, y)$

$$\therefore f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y + \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}}{\lambda x}$$

$$= \frac{\lambda\left[y + \sqrt{x^2 + y^2} \right]}{\lambda x} = \lambda^{\circ} f(x, y)$$

$\Rightarrow f(x, y), 0$ घात का समघतीय फलन है।

अब $y = vx$ रखने पर

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2 x^2}}{x}$$

$$= \frac{x\left(v + \sqrt{1 + v^2} \right)}{x}$$

$$= v + \sqrt{1 + v^2}$$

$x\dfrac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$ या $\dfrac{1}{\sqrt{1 + v^2}}dv = \dfrac{dx}{x}$

दोनों पक्षों का समकालन करने पर –

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log | v + \sqrt{1 + v^2} | = \log | x | + \log C$$

$v = \dfrac{y}{x}$ रखने पर

$$\log \left| \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{1 + y^2}}{x^2} \right| = \log | x | + \log C$$

या $\log \left| \dfrac{y + \sqrt{1 + y^2}}{x} \right| - \log | x | = \log C$

$$\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}=C$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$$

13. $x\frac{dy}{dx}-y+x\sin\frac{y}{x}=0$ समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. प्रश्नानुसार $x\frac{dy}{dx}-y+x\sin\frac{y}{x}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x\sin\frac{y}{x}}{x}=f(x,y)$$

$$\therefore f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda y-\lambda x\sin\frac{\lambda y}{\lambda x}}{\lambda x}=\frac{\lambda\left(y-x\sin\frac{y}{x}\right)}{\lambda x}$$

$=\lambda^{\circ} f(x,y)$

$\therefore f(x,y)$ समघातीय फलन है जिकी घात शून्य है।

$y=vx$ रखने पर,

$$\therefore \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

या $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{vx-x\sin\frac{vx}{x}}{x}=v-\sin v$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर –

$$\int\frac{2-\log v}{-v+v\log v}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1-\log v+1}{v(-1+\log v)}dv=\log|x|+\log C$$

$-\log|v|+\log|\log v-1|=\log|x|+\log C$

$\log|\log v-1|=\log v+\log x+\log x=\log|Cvx|$

$\log v-1=Cvx$

$\log v=1+Cvx$

$$\log\frac{y}{x}=1+C.\frac{y}{x}.x$$

$$=\frac{y}{x},\log\frac{y}{x}=1+Cy$$

अभिष्ट हल $Cy=\log\frac{y}{x}-1$

14. $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0, y = 2$ यदि $x = 1$ समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. अवकल समीकरण $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$

$$2x^2 \frac{dy}{dx} = 2xy + y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy + y^2}{2x^2} \quad \text{.....1}$$

अब $y = vx$ रखने पर –

$$\frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x.vx + v^2x^2}{2x^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v^{-2}dv = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर–

$$\int v^{-2}dv = \frac{1}{2}.\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{2}\log|x| + C$$

$$\frac{-1}{v} = \frac{1}{2}\log|x| + C$$

पुनः $v = \frac{y}{x}$ रखने पर –

$$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log|x| + C \quad \text{..... 2}$$

अब $x = 1, y = 2$ रखने पर

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 1 + C$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

C का मान समीकरण 2 में रखने पर

$$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}[1 - \log|x|]$$

अतः अभिष्ट हल $y = \frac{2x}{1 - \log|x|}$

15. अवकल समीकरण $\left(\tan^{-1} y - x\right)dy = \left(1+y^2\right)dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप से लिखा जा सकता है।

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \quad \text{.....1}$$

समीकरण 1, $\frac{dx}{dy} + p_1 x = Q_1$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहां $p_1 = \frac{1}{1+y^2}$ एवं $Q_1 = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$

$$I.F. = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

इसलिए अवकल समीकरण का हल है–

$$\Rightarrow xe^{\tan^{-1} y} = \int \left(\frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1} y} dy + C \quad \text{.....2}$$

$$I = \int \left(\frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1} y} dy$$

$\Rightarrow \tan^{-1} y = t$ रखने पर हम पाते हैं कि $\left(\frac{1}{1+y^2}\right)dy = dt$

अतः $I = \int te^t dt, I = te^t - \int 1.e^t e^t, I = te^t = e^t(t-1)$

$$I = e^{\tan^{-1} y}(\tan^{-1} y - 1)$$

समीकरण 2 में I का मान प्रतिस्थापित करने पर–

$x.e^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y}\left(\tan^{-1} y - 1\right) + C$ पाते है।

$x = \left(\tan^{-1} y - 1\right) + Ce^{\tan^{-1} y}$ (अभिष्ट हल)

16. $\frac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x$; $y = 2$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$ तो अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

Ans. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x$

यह $\frac{dy}{dx} + py = Q$ के रूप का अवकल समीकरण है–

अतः $p = -3\cot x \qquad Q = \sin 2x$

$$\therefore I.F. = e^{\int p.dx} = e^{\int -3\cot x dx} = e^{-3\log \sin x} = e^{\log(\sin x)^{-3}} = \frac{1}{\sin^3 x} = \operatorname{cosec}^3 x$$

$$I.F. = \operatorname{cosec}^3 x$$

अवकल समीकरण का हल–

$$y.I.F. = \int Q.I.F.dx + C$$

$$\Rightarrow y.\operatorname{cosec}^3 x = \int \sin 2x.\operatorname{cosec}^3 x dx + C$$

$$= \int 2\sin x.\cos x.\operatorname{cosec}^3 .dx + C$$

$= 2\int \cot x.\cos ec\, x\, dx + C$

$\Rightarrow y.\cos ec^3 x = -2\cos ec\, x + C$

$y = -2\sin^2 x + C\sin x$

$x = \frac{\pi}{2}$ तथा $y = 2$ रखने पर $C = 4$

अतः $y = -2\sin^2 x + 4\sin^3 x$

17. बिन्दु (0,0) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $y' = e^T \sin x$ है।

Ans. $y' = e^T \sin x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^T \sin x$

$\Rightarrow dy = e^T \sin x dx$

$\int dy = \int e^T \sin x dx$

$y = \int e^T \sin x dx + C$

माना कि $I = \int e^x \sin x dx$

e^x को पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$I = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx$

$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$

$\int e^x \cos x dx$ का खण्डशः समाकलन करने पर–

$I = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$

$= -e^x \cos x + e^x \sin x - I$

$\therefore 2I = -e^x cox + e^x \sin x$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x)$

I का मान समीकरण 1 में रखने पर

$y = \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x) + C$

$x = 0, y = 0$ रखने पर

$o = -\frac{1}{2} \times 1 + C \qquad \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

इसलिए समीकरण का अभिष्ट हल होगा– $y = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$

18. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि r% वार्षिक की दर से होती हैं यदि 100 रुपये 10 वर्षों में दुगुने हो जाते हैं तो r का मान ज्ञात कीजिए। $(\log_e 2 = 0.6931)$

Ans. माना किसी समय t पर मूलधन p है एवं दर r है।

अतः $\frac{dP}{dt} = \frac{\Pr}{100}$

$\therefore \frac{dP}{dt} = \frac{\Pr}{100} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{rdt}{100}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dP}{P} = \int \frac{r}{100} dt$$

$$\log P = \frac{r}{100} t + \log C$$

$$\therefore \log P - \log C = \frac{r}{100} t$$

$$\Rightarrow \log \frac{P}{C} = \frac{r}{100} t \Rightarrow \frac{P}{C} = e^{\frac{r}{100} t}$$

$$\Rightarrow P = Ce^{\frac{t}{100} t} \quad \text{.....1}$$

जब $t = 0, P = 100$ तो समीकरण से

$100 = Ce^{\circ} \Rightarrow C = 100$

समीरण 1 में C का मान रखने पर

$$P = 100e^{\frac{r}{100} t}$$

तथा जब $t = 10, P = 200$ तो समीकरण 1 से

$$200 = 100e^{\frac{r}{100} t \times 10}$$

$$2 = e^{\frac{r}{10}}$$

$$\therefore \frac{r}{10} = \log 2$$

$$\Rightarrow r = -10 \log 2 = 10 \times 0.6931$$

$$\therefore r = 6.931\%$$

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम **QR CODE** स्कैन करें

अध्याय – 10
सदिश बीजगणित

अंकभार (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7)

1. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के दिक् कोसाइन है–

(1) $\frac{\pm 1}{\sqrt{7}}, \frac{\pm 2}{\sqrt{7}}, \frac{\pm 3}{\sqrt{7}}$ (2) $\frac{\pm 1}{\sqrt{14}}, \frac{\pm 2}{\sqrt{14}}, \frac{\pm 3}{\sqrt{14}}$ (3) $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. 2

2. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ हो तो $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश होगा –

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k})$ (3) $\frac{1}{2}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. 2

3. यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो $\vec{a}.\vec{b} \geq 0$ होगा यदि–

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (3) $0 < \theta < \pi$ (4) $0 < \theta < 2\pi$

Ans. 2

4. यदि A(1, 1,2), B (2, 3, 5) तथा C(1, 5, 5) ΔABC के शीर्ष हो तो क्षेत्रफल होगा–

(1) $\sqrt{61}$ वर्ग इकाई (2) $\frac{1}{2}\sqrt{61}$ वर्ग इकाई (3) $61\sqrt{2}$ वर्ग इकाई (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. 2

5. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ पर प्रक्षेप होगा –

(1) 19 (2) $19\sqrt{9}$ (3) $\frac{19}{\sqrt{9}}$ (4) $\frac{19}{9}$

Ans. 4

6. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के दिक् अनुपात लीखिए और इसकी सहायता से दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

Ans. सदिश $\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ तब a,b,c सदिश $\vec{r}$ के दिक्–अनुपात होते है अतः $a = 1, b = 1, c = -2$

यदि l,m,n दिए हुए सदिश के दिक्–कोसाइन है तो

$l = \frac{a}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\left(\because |\vec{r}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}\right)$

$m = \frac{b}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$n = \frac{c}{|\vec{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$

अतः दिक्–कोसाइन $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ है।

7. दिए हुए सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, के लिए सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

Ans. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + (-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$= (2-1)\hat{i} + (-1+1)\hat{j} + (2-1)\hat{k}$

$= \hat{i} + 0.\hat{j} + \hat{k}$

$= \hat{i} + \hat{k}$

अब $|\vec{a} + \vec{b}| = |\hat{i} + \hat{k}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{2}$

$(\vec{a} + \vec{b})$ के अनुदिश मात्रक सदिश $= \frac{1}{|\vec{a} + \vec{b}|}(\vec{a} + \vec{b})$

$= \frac{\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{k}}{\sqrt{2}}$

अतः मात्रक सदिश $= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$ है।

8. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

Ans. सदिश $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप

$= \frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}.\vec{b})$ $\quad \because |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$= \frac{1}{\sqrt{6}}(2.1 + 3.2 + 2.1)$

$= \frac{1}{\sqrt{6}}(10) = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{6}$

9. दो सदिशों $\vec{a}$ और के $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए। यदि इनके परिमाण समान है और इनके बीच का कोण 60° है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

Ans. प्रश्नानुसार,

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$

तथा $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}$

$\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण $\theta = 60^\circ$

माना $|\vec{a}| = |\vec{b}| = k$

अब $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2}}{k.k} = \frac{1}{2k^2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2k^2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2k^2}$

$k^2 = 1$

$k = \pm 1$

परन्तु $k = |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\therefore k = 1 = |\vec{a}| = |\vec{b}|$

अतः $|\vec{a}| = 1$

तथा $|\vec{b}| = 1$

10. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी सलंग्न भुजाएं $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ द्वारा दी गई है।

Ans. किसी समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएं $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है तो उसका क्षेत्रफल $|\vec{a} \times \vec{b}|$ द्वारा प्राप्त होता है।

तो $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{25 + 1 + 16} = \sqrt{42}$

11. यदि $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

Ans. $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$

तो $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-14 + 14)\hat{i} - (2 - 21)\hat{j} + (-2 + 21)\hat{k}$

$= 0\hat{i} + 19\hat{j} + 19\hat{k}$

$\vec{a} \times \vec{b} = |19\hat{i} + 19\hat{k}|$

$= \sqrt{(19)^2 + (19)^2}$

$= \sqrt{361 + 361}$

$= \sqrt{722}$

$= 19\sqrt{2}$

12. मान लीजिए $\vec{a}=\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}+7\hat{k}$, $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ तो एक ऐसा सदिश $\vec{d}$ ज्ञात कीजिए जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है पर लम्ब हो और $\vec{c}\vec{d}=15$

Ans. प्रश्नानुसार

$\vec{a}=\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}+7\hat{k}$

$\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$

$\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ पर लम्ब सदिश $\vec{a}\times\vec{b}$

तब $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix}$

$=(28+4)\hat{i}-(7-6)\hat{j}+(-2-12)\hat{k}$

$=32\hat{i}-\hat{j}+14\hat{k}$

माना

$\vec{d}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{d}=\lambda(32\hat{i}-\hat{j}+14\hat{k})$

परन्तु $\vec{c}\vec{d}=15$

$\therefore (2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})\lambda(32\hat{i}-\hat{j}+14\hat{k})=15$

$\lambda[2\times32-1\times(-1)+4\times(-14)]=15$

$\lambda[64+1+(-56)]=15$

$9\lambda=15$

$\lambda=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$

$\vec{d}=\frac{5}{3}(32\hat{i}-\hat{j}-14\hat{k})$

$=\frac{160}{3}\hat{i}-\frac{5}{3}\hat{j}-\frac{70}{3}\hat{k}$

$=\frac{1}{3}(160\hat{i}-5\hat{j}-70\hat{k})$

13. सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ के परिणामी के समान्तर एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई है।

Ans. माना $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का परिणामी $\vec{c}$ है।

तब $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

$=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}+(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

$=3\hat{i}+\hat{j}$

$\therefore \vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $= \frac{1}{|\vec{c}|}(\vec{c}) = \hat{c}$

$$\hat{c} = \frac{3\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{j}$$

अतः $\vec{c}$ के अनुदशि वह सदिश जिसका परिमाण 5 इकाई हो

$$= 5\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{j}\right)$$

$$= \frac{15}{\sqrt{10}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{10}}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\hat{j}$$

$$= \sqrt{10}\frac{3}{2}\hat{i} + \frac{5}{10}\sqrt{10}\hat{j}$$

$$= \sqrt{10}\frac{3}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\sqrt{10}\hat{j}$$

14. सदिश $(\vec{a}+\vec{b})$ और $(\vec{a}-\vec{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहां $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ है।

Ans. प्रश्नानुसार,

$\vec{a}+\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ $\vec{a}-\vec{b} = -\hat{j}-2\hat{k}$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 1-1 & 1-2 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = -2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k} = \vec{c}$ (माना)

$|\vec{c}| = \sqrt{2^2+4^2+2^2} = \sqrt{4+16+4}$

$= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

अतः अभिष्ट मात्रक सदिश

$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$ है।

15. दर्शाइये कि ox, oy, oz अक्षों के साथ बराबर झुके हुये सदिश की दिक्–कोसाइन कोज्याएं $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

Ans. माना एक सदिश $\overrightarrow{OP}, ox, oy$ तथा oz के साथ बराबर कोण α बनाता है तो

$\overrightarrow{OP}$ की दिक् कोज्याऐं $= \cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\left[\because l^2+m^2+n^2 = 1\right]$

$= \cos^2\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः $\overrightarrow{OP}$ की दिक्–कोसाइन $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

16. $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान क्या है।

Ans. $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$

$=\hat{i}.(\hat{i})+\hat{j}(-\hat{j})+\hat{k}.(\hat{k})$

$=|\hat{i}|^2-|\hat{j}|^2+|\hat{k}|^2$

$=1-1+1$

$=1$

17. बिन्दुओं A(1, 2, 2) और B(2, 3, 1) को मिलाने वाला सदिश $\overrightarrow{AB}$ क्या होगा।

Ans. A(1, 2, 2) और B(2, 3, 1)

$\overrightarrow{AB}=(2-1)\hat{i}+(3-2)\hat{j}+(1-2)\hat{k}$ $\quad\left[\because \overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}\right]$

$\overrightarrow{AB}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

18. यदि दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इस प्रकार है कि $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3$ और $\vec{a}.\vec{b}=4$ तो $|\vec{a}-\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

Ans. $\because|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=(2)^2-2\times4+(3)^2$

$=4-8+9$

$=5$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=5$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$

19. यदि एक त्रिभुज की दो भुजायें सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ से निरूपित हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Ans. माना $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ $\qquad\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=(2+4)\hat{i}-(1-6)\hat{j}+(-2-6)\hat{k}$$

$=6\hat{i}+5\hat{j}-8\hat{k}$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{36+25+64}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{125}$

$=\frac{1}{2}\times5\sqrt{5}$ वर्ग इकाई

20. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i) दिक्कोसाइन के समानुपाती संख्याऐं lr, mr, br सदिश $\vec{r}$ के ..... कहलाते है।

Ans. दिक्अनुपात

(ii) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते है यदि उनके ..... है।

Ans. परिणाम एवं दिशा समान

(iii) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के दिक्कोसाइन ..... होंगे।

Ans. $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}$

(iv) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो शुन्यतर सदिश है। तब $\vec{a}.\vec{b} = 0$ यदि और केवल यदि ..... है।

Ans. $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत है।

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें

अध्याय – 11
त्रि–विमीय ज्यामिति

अंकभार (1 + 1 + 3 + 4 = 9)

1. यदि दो रेखाओं के दिकअनुपात a_1,b_1,c_1 तथा a_2,b_2,c_2 है तो वे परस्पर लम्बवत होगी, यदि–

(1) $a_1b_2 + a_2b_1 + c_1c_2 = 0$ (2) $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$

(3) $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$ (4) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

Ans. 4

2. यदि एक रेखा x, y और z अक्ष के साथ क्रमशः $90^\circ, 135^\circ, 45^\circ$ कोण बनाती है तो इसकी दिक्कोसाइन होगी–

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$ (2) $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ (4) $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

Ans. 2

3. दो परस्पर लम्बवत रेखाओं के दिक्अनुपात 1, 2, 3 तथा 3, 2, λ है तो λ का मान होगा–

(1) $\frac{7}{3}$ (2) 5 (3) $\frac{5}{3}$ (4) $-\frac{7}{3}$

Ans. 4

4. x-अक्ष के समान्तर तथा मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण होगा–

(1) $\vec{r} = \lambda\hat{j}$ (2) $\vec{r} = \lambda(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (3) $\vec{r} = \lambda\hat{i}$ (4) $\vec{r} = \lambda(\hat{j} + \hat{k})$

Ans. 3

5. दर्शाइए कि बन्दु (2, 3, 4), (-1, -2, 1), (5, 8, 7) संरेख है–

Ans. माना दिये गये बिन्दु A(2, 3, 4), B(-1, -2,1) तथा C(5, 8, 7) हैः

$$\therefore AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-3)^2 + (1-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{3 + 25 + 9} = \sqrt{43}$$

$$BC = \sqrt{(5+1)^2 + (8+2) + (7-1)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (10)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 100 + 36} = 2\sqrt{43}$$

$$AC = \sqrt{(2-5)^2 + (3-3)^2 + (4-7)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 25 + 9} = \sqrt{43}$$

$$\therefore AC + AB = \sqrt{43} + \sqrt{43} = 2\sqrt{43} = BC$$

अतः बिन्दु A, B तथा C संरेख है।

6. बिन्दु $(5,2,-4)$ से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i}+2\hat{i}-8\hat{k}$ के समांतर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. हमे ज्ञात है कि–

$\vec{a}=5\hat{i}+2\hat{i}-4\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{i}-8\hat{k}$

इसलिए, रेखा का सदिश समीकरण है–

$\vec{r}=5\hat{i}+2\hat{i}-4\hat{k}+\lambda\left(3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}\right)$

7. दिए गए रेखा युग्म

$\vec{r}=3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$

और $\vec{r}=5\hat{i}-2\hat{j}+\mu\left(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}\right)$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

Ans. मान लीजिए

माना रेखाओं के बीच कोण θ हो तो

$$\cos\theta=\left|\frac{\vec{b}_1.\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

$$\cos\theta=\left|\frac{\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)\left(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}\right)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$\cos\theta=\left|\frac{3+4+12}{3\times7}\right|=\frac{19}{21}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

8. बिन्दु $(1,2,3)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ के समान्तर है।

Ans. स्थिति बिन्दु $A(\vec{a})$ से गुजरने वाली रेखा AP तथा सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा का समीकरण

$\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$

यहां पर $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

और $\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

अभीष्ट रेखा AP का समीकरण

$\vec{r}=\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$

9. निम्न रेखा युग्म के बीच कोण ज्ञात कीजिए।

$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{8}$

Ans. रेखा $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ के दिक् अनुपात 2, 2, 1 है तथा रेखा $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$ के दिक् अनुपात 4, 1, 8 है।

$\therefore a_1=2,b_1=2,c_1=1$

$a_2 = 3, b_2 = c_2 = 8$

यदि दो रेखाओं के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$= \frac{2\times4 + 2\times1 + 1\times8}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2}}$$

$$= \frac{8+2+8}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{16+1+64}} = \frac{18}{\sqrt{9}\sqrt{81}} = \frac{18}{3\times9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

10. P का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएं

$$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2P} = \frac{z-3}{2}$$

और $\frac{7-7x}{3P} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हो।

Ans. दी हुई रेखाओं को मानक रूप में रखने पर,

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-z}{2P/7} = \frac{z-3}{2}$$

और $\frac{x-1}{-3P/7} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$

रेखा $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2P/7} = \frac{z-3}{-5}$ के दिक् अनुपात $-3, \frac{2P}{7}, 2$ है तथा

रेखा $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$ $\frac{x-1}{-3P/7} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$ के दिक् अनुपात $-\frac{3P}{7}, 1, -5$ है।

रेखाएं लम्बवत हो तो –

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

$$(-3)\times\frac{(-3P)}{7} + \frac{2P}{7}\times1 + 2\times(-5) = 0$$

$$\frac{9P}{7} + \frac{2P}{7} = 10$$

$$\frac{11P}{7} = 10$$

$$P = \frac{70}{11}$$

11. यदि रेखाएं $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-5}{2k}=\frac{z-6}{2}$ और $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्ब है। तो k का मान ज्ञात करो।

Ans. दी गई रेखाएं $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$ में दिक् अनुपात $-3,3k,2$ है तथा $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ के दिक् अनुपात $3k,1,-5$ हैं तब रेखाएं परस्पर लम्ब है तब

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

$\therefore(-3)\times(3k)+2k\times1+2\times(-5)=0$

$\Rightarrow -9k+2k-10=0$

$\Rightarrow -7k-10=0$

$\Rightarrow 7k=-10$

$\therefore k=-\frac{10}{7}$

12. रेखाएं जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित है, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

$\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$

$\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}+(2s+1)\hat{k}$

Ans. प्रश्नानुसार पहली रेखा का समीकरण

$\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$

$=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}+t\left(-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)$

$\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ से इसकी तुलना करने पर

$\vec{a}_1=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{b}_1=-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

प्रश्नानुसार दुसरी रेखा

$\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$ या

$\vec{r}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}+s\left(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$

$\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$ इसकी तुलना करने पर

$\vec{a}_2=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{b}_2=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

हम जानते है कि ऐसा

$\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r}_2=\vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$ के बीच

न्यूनतम दूरी $d=\left|\frac{(\vec{a}_2-\vec{a}_1).(\vec{b}_2\times\vec{b}_1)}{\left|\vec{b}_1\times\vec{b}_2\right|}\right|$ 1

यहां $\vec{a}_2-\vec{a}_1=\left(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}\right)-\left(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}\right)=\hat{j}-4\hat{k}$

तथा $\vec{b}_1\times\vec{b}_2=\left(-\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)\times\left(\hat{i}\times2\hat{j}-2\hat{k}\right)$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-214)\hat{i} - (2+2)\hat{j} + (-2-1)\hat{k}$$

$2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$

अतः $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{4 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$

इनका मान 1 में रखने पर

$$d = \left| \frac{\left(\hat{j} - 4\hat{k}\right)\left(2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}\right)}{\sqrt{29}} \right| = \left| \frac{0 \times 2 + 1 \times -4 + (-4)(-3)}{\sqrt{29}} \right|$$

$$= \frac{8}{\sqrt{29}}$$

13. रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Ans. दी गई रेखाएं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$

और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$

यहां पर $x_1 = -1, y_1 = -1, z_1 = -1$

तथा $x_2 = 3, y_2 = 5, z_2 = 7$

और $a_1 = 7, b_1 = -6, c_1 = 1$

$a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 1$

दो रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी $d = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}} \right|$

$$= \left| \frac{\begin{vmatrix} 3+1 & 5+1 & 7+1 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-6+2)^2 + (1-7)^2 + (-14+6)^2}} \right| = \left| \frac{-116}{\sqrt{116}} \right| = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

अतः अभीष्ट न्यूनतम दूरी $= 2\sqrt{29}$ इकाई

नोट– इन रेखाओं के बीच की दूरी इनको सदिश रूप में बदलकर प्रश्न 12 की तरह ज्ञात कर सकते है।

14. बिन्दु (1, 2, -4) से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ पर लम्ब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. माना अभीष्ट रेखा का समीकरण $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}+\lambda\left(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}\right)$ 1

यह रेखा दोनों दी गई रेखाओं के लम्बवत है अतः

$3b_1-16b_2+7b_3=0$ 2

तथा $3b_1+8b_2-5b_3=0$ 3

समीकरण 2 व 3 से –

$$\frac{b_1}{80-56}=\frac{-b_2}{-15-12}=\frac{b_3}{24+48}$$

$$\frac{b_1}{2}=\frac{b_2}{3}=\frac{b_3}{6}$$

अतः b_1,b_2,b_3 के समानुपाती मान समीकरण 1 में रखने पर

रेखा $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$

15. रेखा युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए–

$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-3}$ तथा $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-5}{4}$

Ans. दी गई रेखाओं के दिक्अनुपात–

$a_1=2,b_1=5,c_1=-3$

$a_2=-1,b_2=8,c_2=4$

दोनों रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो –

$$\cos\theta=\left|\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{2\times(-1)+5\times8+(-3)\times4}{\sqrt{4+25+9}\sqrt{1+64+16}}\right|$$

$$=\left|\frac{-2+40-12}{\sqrt{38}\sqrt{81}}\right|$$

$$=\frac{26}{9\sqrt{38}}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$$

अध्याय – 12
रैखिक प्रोग्रामन

अंकभार (4)

1. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = 5x + 3y$ का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए

$5x + 2y \le 10, 3x + 5y \le 15, x \ge 0, y \ge 0$

हल :– दिए व्यवरोध

$5x + 2y \le 10$ ———— व्यवरोध (1)

$3x + 5y \le 15$ ————व्यवरोध (2)

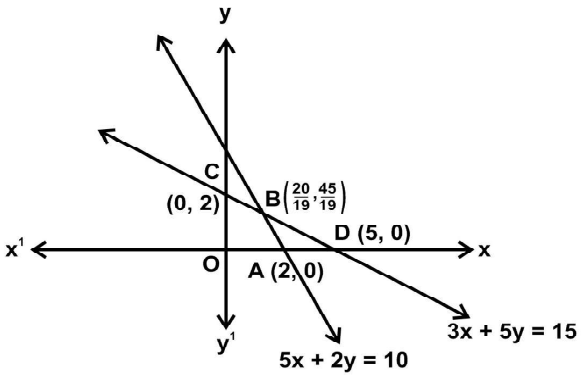
$x \ge 0, y \ge 0$ ———— व्यवरोध (3)

व्यवरोध (1) से समीकरण $5x + 2y = 10$ या $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ तथा मूल बिन्दु (0, 0) $0 < 10$ संतुष्ट करता है।

व्यवरोध (2) से समीकरण $3x + 5y = 15$ या $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

तथा मूल बिन्दु (0, 0), $0 < 15$ संतुष्ट करता है।

व्यवरोध (1), (2) व (3) के आलेखों से परिबद्ध क्षेत्र OABC सुसंगत क्षेत्र है।



कोणीय बिन्दुओं के संगत Z के मान

A (2, 0) तब $Z = 5(2) + 3(0) = 10$

$B\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ तब $Z = 5 \times \frac{20}{19} + 3 \times \frac{45}{19} = \frac{235}{19}$ ——— अधिकतम

$C(0,2)$ तब $Z = 5(0) + 3(2) = 6$

अतः– बिन्दु $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ पर Z का अधिकतम मान $\frac{235}{19}$ प्राप्त होता है।

2. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 5y$ का आलेखीय विधि से न्यूनत्तमीकरण कीजिए–

$x + 3y \ge 3,\ x + y \ge 2,\ x, y \ge 0$

हलः– दिए व्यवरोध $x + 3y \ge 3$ ——— व्यवरोध (1)

$x + y \ge 2$ ———— व्यवरोध (2)

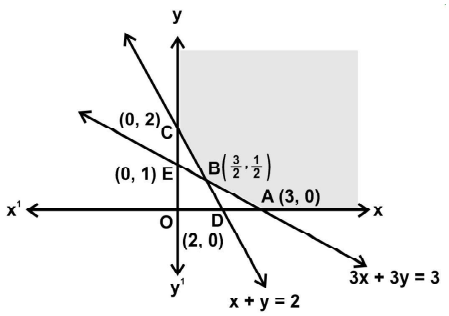
$x \ge 0, y \ge 0$ ———— व्यवरोध (3)

व्यवरोध (1) से समीकरण $x+3y=3$ या $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}=1$

तथा मूल बिन्दु (0, 0), $0>3$ संतुष्ट नहीं करता है।

व्यवरोध (2) से समीकरण $x+y=2$ या $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ तथा मूल बिन्दु $(0,0)$ $0>2$ संतुष्ट नहीं करता है।

व्यवरोध (1), (2) व (3) के आलेखों से अपरिबद्ध क्षेत्र अर्थात् सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) दिखाया गया है।



कोणीय बिन्दुओं के संगत Z के मान

A (3, 0) तब $Z=3(3)+5(0)=9$

$B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ तब $Z=3\left(\frac{3}{2}\right)+5\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{14}{2}=7$ ——— न्यूनतम

$C(0,2)$ तब $Z=3(0)+5(2)=10$

अतः– बिन्दु $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ पर Z का न्यूनतम मान 7 प्राप्त होता है।

3. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z=3x+9y$ का रैखिक प्रोग्रामन के ग्राफीय विधि द्वारा न्यूनतमीकरण व अधिकतमीकरण कीजिए–

$$x+3y\le+60$$
$$x+y\ge10$$
$$x\le y$$
$$x\ge0,\ y\ge0$$

हल :– दिए व्यवरोध

$x+3y\le+60$ ——— व्यवरोध (1)

$x+y\ge10$ ——— व्यवरोध (2)

$x\le y$ या $x-y\le0$ ——— व्यवरोध (3)

$x\ge0,\ y\ge0$ ——— व्यवरोध (4)

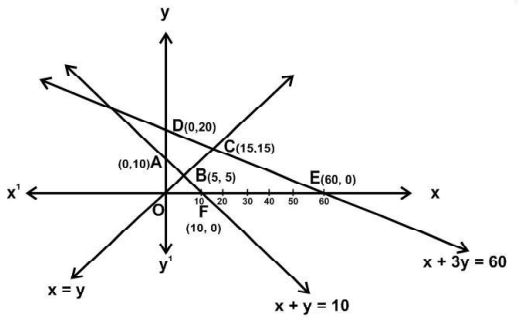
व्यवरोध (1) से समीकरण $x+3y=60$ या $\frac{x}{60}+\frac{y}{20}=1$

व्यवरोध (2) से समीकरण $x+y=10$ या $\frac{x}{10}+\frac{y}{10}=1$

तथा मूल बिन्दु (0, 0) असमिका $x+y>10,\ 0>10$ को संतुष्ट नहीं करता है।

व्यवरोध (3) से समीकरण $x=y$ तथा बिन्दु (1, 0), असमिका $x-y<0,\ 1<0$ को संतुष्ट नहीं करता है।

असमिका (व्यवरोध) 1, 2, 3, व 4 के आलेखों से परिबद्ध क्षेत्र ABCD सुसंगत क्षेत्र है।



कोणीय बिन्दुओं के संगत Z के मान–

A(0, 10) पर $Z=3(0)+9(10)=90$

B (5, 5) पर $Z=3(5)+9(5)=60$ ——— न्यूनतम

C (15, 15) पर $Z=3(15)+9(15)=180$ ——अधिकतम

D (0, 20) पर $Z=3(0)+9(20)=180$ ——— अधिकतम

अतः– सुसंगत क्षेत्र बिन्दु B (5, 5) पर Z का न्यूनतम मान 60 है। तथा अधिकतम मान 180 दो बिन्दुओं C (15, 15) व D (0, 20) है। व CD पर स्थित प्रत्येक बिन्दु पर भी अधिकतम मान 180 है।

अध्याय – 13
प्रायिकता

अंकभार (1 + 1 + 2 + 3 = 7)

1. यदि $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=0$ तब $P(A|B)$ है–

(1) 0 (2) ½ (3) परिभाषित नहीं (4) 1

2. यदि A और B दो घटनाएं इस प्रकार है कि $P(A|B)=P(B|A)\neq 0$ तब

(1) $A\subset B$ (2) $A=B$ (3) $A\cap B=\phi$ (4) $P(A)=P(B)$

3. दो पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर एक सम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी?

(1) 0 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{12}$ (4) $\frac{1}{36}$

4. दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते है, यदि

(1) A और B परस्पर अपवर्जी है (2) P(A'B') = [1-P(A)][1-P(B)]

(3) P(A) = P(B) (4) P(A) + P(B) = 1

5. A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित प्रदर्शित हुआ। वास्तविक रूप में चित प्रकट होने की प्रायिकता है–

(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{2}{5}$

6. यदि A और B ऐसी घटनाएं है कि $A\subset B$ तथा $P(B)\neq 0$ तो निम्न में से कौन ठीक है–

(1) $P(A|B)=\frac{P(B)}{P(A)}$ (2) $P(A|B)<P(A)$ (3) $P(A|B)\geq P(A)$ (4) इनमें से कोई नहीं

7. यदि A और B दो ऐसी घटनाएं है कि $P(A)\neq 0$ और $P(B|A)=1$ है, तो

(1) $A\subset B$ (2) $B\subset A$ (3) $B=\phi$ (4) $A=\phi$

8. यदि $P(A|B)>P(A)$, तब निम्न में से कौन सही है।

(1) $P(A|B)<P(B)$ (2) $P(A\cap B)<P(A).P(B)$ (3) $P(B|A)>P(B)$ (4) $P(B|A)=P(B)$

9. यदि A और B ऐसी दो घटनाएं है कि–

$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)$, तब

(1) P(B|A) = 1 (2) P(A|B)=1 (3) P(B|A)=0 (4) P(A|B)=0

10. यदि P(A) = 0.5 है तो P(A') का मान होगा?

(1) 0.2 (2) 0.8 (3) 0.5 (4) 0

-: Answer :-

1-3, 2-4, 3-4, 4-2, 5-1, 6-3, 7-1, 8-3, 9-2, 10-3

भाग–ब

11. एक परिवार में दो बच्चे है। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है?

Ans. माना कि b लड़का एवं g लड़की को निरूपित करते है। तो परीक्षण का प्रतिदर्श सभष्टि है–

$S = \{(b, b), (b, g), (g, b), (g,g)\}$

माना कि E एवं F क्रमशः निम्न घटनाओं को दर्शाते है–

E : दोनों बच्चे लड़के है।

F : बच्चों में से कम से कम एक लड़का है।

तब $E = \{(b,b)\}, F = \{(b, b), (g, b), (b, g)\}$

अब $E \cap F = \{(b,b)\}$

अतः $P(F) = \frac{3}{4}$ एवं $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

इसलिए $P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

12. एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सहप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans. माना कि E घटना संख्या 4 का न्यूनतम एक बार प्रकट होना तथा F घटना दोनों पासों पर प्रकट संख्याओं का योग 6 होने को दर्शाता है।

तब $E = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4)\}$

एवं $F = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

हम जानते है कि $P(E) = \frac{11}{36}$ एवं $P(F) = \frac{5}{36}$

तथा $P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

अतः वांछित प्रायिकता $P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$

13. यदि दिया गया है कि दोनों पासों को फैंकने पर प्राप्त संख्याएं भिन्न–भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans. दो पासों को उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि $S = 6 \times 6 = 36$

माना कि घटना A = दो संख्याओं का योग 4 है।

$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

अतः $n(A) = 3$

दो पासों की उछाल में समान संख्या वाले परिणाम

$= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

घटना B = पासों पर उछाल पर भिन्न–भिन्न अंक प्राप्त होगा

$= 36 - 6 = 30$

$n|B| = 30$

$A \cap B = \{(1,3),(3,1)\}$

तब $n(A \cap B) = 2$, $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

$P(A) = \frac{3}{36}, P(B) = \frac{30}{36}$

अतः $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

14. एक अनभिनत पासे को दो बार उछाला गया। मान लें A घटना पहली उछाल पर विषय अंक प्राप्त होना और B द्वितीय उछाल पर विषय अंक प्राप्त होना दर्शाते है। घटनाओं A और B के स्वातंत्रय का परीक्षण कीजिए।

Ans. यदि सभी 36 मौलिक घटनाओं को समसभाव्य मान ले तो

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ एवं $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

साथ ही $P(A \cap B) = P$ (दोनों उछालों में विषय अंक प्राप्त होना)

$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

अब $P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

स्पष्टतया $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

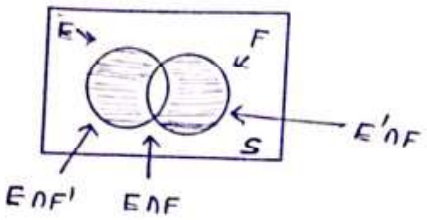
अतः A और B स्वतंत्र घटनाएं है।

15. सिद्ध कीजिए कि यदि E और F दो स्वतंत्र घटनाएं है तो E और F' भी स्वतंत्र होगी।

Ans. क्योंकि E एवं F स्वतंत्र घटनाएं है इसलिए

$P(E \cap F) = P(E).P(F)$ 1

उपरोक्त वेन आरेख से स्पष्ट है कि $(E \cap F)$ तथा $(E \cap F')$ परस्पर अपवर्जी घटनाऐं है।



साथ ही $E=(E\cap F)\cup(E\cap F')$

अतः $P(E)=P(E\cap F)+P(E\cap F')$

$P(E\cap F')=P(E)-P(E).P(F)$ (समीकरण 1 से)

$P(E\cap F')=P(E)[1-P(F')]$

$P(E\cap F')=P(E).P(F')$

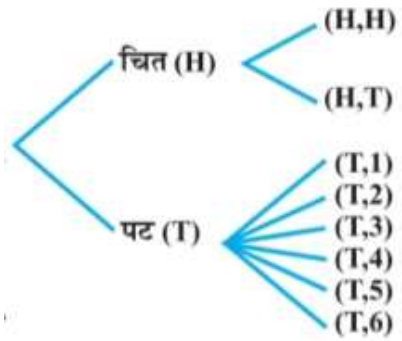
अतः E और F' स्वतंत्र घटनाएं है।

भाग–स

16. एक सिक्के को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि सिक्के पर चित प्रकट तो सिक्के को पुनः उछालें परन्तु यदि सिक्के पर पट प्रकट हो तो एक पासे को फेंकें। यदि घटना कम से कम एक पट प्रकट होना का घटित होना दिया गया है तो घटना पासे पर 4 बड़ी संख्या प्रकट होना की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans. परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है–

S = {(H, H), (H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)}



जहां (H, H) दर्शाता है कि दोनों उछालों पर चित प्रकट हुआ और (T, i) दर्शाता है कि पहली उछाल पर एक पट और पासे को फेंकने पर संख्या i प्रकट हुई।

अतः 8 मौखिक घटनाओं (H, H), (H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6) की क्रमशः $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12}$ प्रायिकता निर्धारित की जा सकती है।

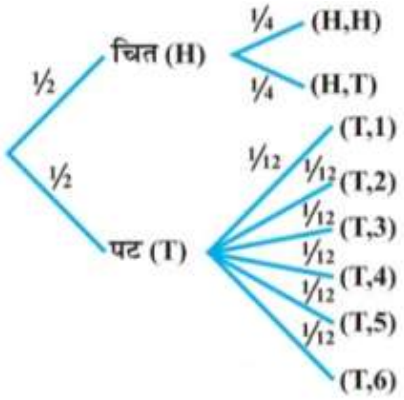
मान लें F घटना न्यूनतम एक पट प्रकट होना और E घटना पासे पर 4 से बड़ी संख्या प्रकट होना को दर्शाते हैं।

तब $E=\{(H,T),(T,1),(T,2),(T,3)(T,4),(T,5),(T,6)\}$

$E = \{(T,5),(T,6)\}$ और $E \cap F = \{(T,5),(T,6)\}$

अब $P(F) = P(\{(H,T)\}) + P(\{(T,1)\}) + P(\{(T,2)\}) + P(\{(T,3)\}) + P(\{(T,4)\}) + P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\})$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$



और $P(E \cap F) = P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

अतः $P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$

17. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंट गई गड्डी में से एक के बाद एक तीन पते बिना प्रतिस्थापित किए निकाले गए। पहले दो पत्तों का बादशाह और तीसरे का इक्का होने की क्या प्रायिकता है?

Ans. मान लें कि K घटना निकाला गया पता बादशाह है को और A घटना निकाला गया पता इक्का है को व्यक्त करते हैं। स्वष्टतया हमें P(KKA) ज्ञात करना है।

अब $P(K) = \frac{4}{52}$

साथ ही $P(K \mid K)$ यह ज्ञात होने पर कि पहले निकाला गया पता बादशाह है पर दूसरे पते का बादशाह होने की प्रायिकता को दर्शाता है। अब गड्डी में $(52-1) = 51$ पत्ते है जिनमें तीन बादशाह है

इसलिए $P(K \mid K) = \frac{3}{51}$

अंततः $P(A \mid KK)$ तीसरे निकाले गए पते का इक्का होने की सप्रतिबंध प्रायिकता है जब कि हमें ज्ञात है कि दो बादशाह पहले ही निकाले जा चुके हैं। अब गड्डी में 50 पत्ते रह गए हैं

इसलिए $P(A \mid KK) = P(A \mid KK) = \frac{4}{50}$

प्रायिकता के गुणन नियम द्वारा हमें प्राप्त होता है कि

$P(KKA) = P(K)P(K \mid K)P(A \mid KK)$

$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$

18. तीन अभिन्न डिब्बे I, II और III दिए गए हैं जहां प्रत्येक में दो सिक्के हैं। डिब्बे I में दोनों सिक्के सोने के है, डिब्बे II में दोनों सिक्के चांदी के हैं और डिब्बे III में एक सोने और एक चांदी का सिक्का है। एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से यादृच्छया एक सिक्का निकालता है। यदि सिक्का सोने का है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का ही है?

Ans. मान ले E_1, E_2 और E_3 क्रमशः डिब्बे I, II और III के चयन को निरूपित करते है

तब $P(E_1)=P(E_2)=P(E_3)=\frac{1}{3}$

साथ ही मान लें A घटना 'निकाला गया सिक्का सोने का है' को दर्शाता है।

तब $P(A|E_1)$ = P (डिब्बे I से सोने का सिक्का निकलना) = $\frac{2}{2}=1$

$P(A|E_1)$ = P (डिब्बे II से सोने का एक सिक्का निकलना) = 0

$P(A|E_3)$ = P (डिब्बे III से सोने का सिक्का निकलना) = $\frac{1}{2}$

अब डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का होने की प्रायिकता

= निकाला गया सोने का सिक्का डिब्बे I से होने की प्रायिकता

= $P(E_1|A)$

अब बेज–प्रमेय द्वारा

$$P(E_1 \mid A)=\frac{P(E_1)P(A \mid E_1)}{P(E_1)P(A \mid E_1)+P(E_2)P(A \mid E_2)+P(E_3)P(A \mid E_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

19. एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इस की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

Ans. मान लीजिए कि E व्यक्ति द्वारा पासे को उछाल कर यह बताने की कि उस पर आने वाली संख्या 6 है की घटना है। मान लीजिए कि S_1 पासे पर संख्या 6 नहीं आने की घटना हैं। तब

$P(S_1)$ = संख्या 6 आने की घटना की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$

$P(E|S_1)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे कि संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है, की प्रायिकता

= व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता = $\frac{3}{4}$

$P(E|S_2)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे पर संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 नहीं है, की प्रायिकता

= व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता = $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

अब बेज प्रमेय द्वारा

$P(S_1|E)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने की प्रायिकता कि संख्या 6 प्रकट हुई है, जब वास्तव में संख्या 6 है।

$$= \frac{P(S_1)P(E|S_1)}{P(S_1)P(E|S_1)+P(S_2)P(E|S_2)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}\times\frac{25}{8} = \frac{3}{8}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।

20. A और B बारी–बारी से एक पासे को उछालते है जब तक कि उनमें से कोई एक पासे पर छः प्राप्त कर खेल को जीत नहीं लेता। यदि A खेल को शुरू तो उनके जीतने की क्रमशः प्रायकिता ज्ञात कीजिए।

Ans. मान लीजिए S सफलता (पासे पर 6 प्रकट होना) को और F असफलता (पासे पर 6 प्रकट न होना) को व्यक्त करते हैं।

अतः $P(S)=\frac{1}{6}, P(F)=\frac{5}{6}$

P (A के पहली उछाल में जीतना) = $P(S) = \frac{1}{6}$

A को तीसरी उछाल का अवसर तब मिलता है जब A पहली उछाल में और B दूसरी उछाल में असफल होते है। इसलिए

P(A का तीसरी उछाल में जीतना) = $P(FFS) = P(F)P(F)P(S) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$

इसी प्रकार P(A का पांचवी उछाल में जीतना) = $P(FFFFS) = \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)$

और इसी प्रकार अन्य अतः P(A जीतना) $= \frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)+....$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1-25}{36}} = \frac{6}{11}$$

P(B जीतना) = 1 - P (A जीतना) = $1-\frac{6}{11} = \frac{5}{11}$

21. एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से, समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि –

(i) समस्या हल हो जाती है।

(ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

Ans. A और B द्वारा समस्या हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ और न हल करने की प्रायिकता क्रमशः $1-\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{2}$ और $1-\frac{1}{3}$ या $\frac{2}{3}$ है।

(i) समस्या हल न होने की प्रायिकता $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ दोनों की समस्या हल होने की प्रायिकता $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(ii) यदि समस्या के हल होने को S और न हल होने को F निरूपित करें तो तथ्यतः उस समस्या को हल SF + FS ढंग से हल किया जाएगा।

इसकी प्रायिकता $=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$

22. थैले 1 में 3 लाल तथा 4 काली गेंदे हैं तथा थैला 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदे हैं। एक गेंद को थैला 1 से थैला 2 में स्थानान्तरित किया जाता है और तब एक गेंद थैले 2 से निकाली जाती है। निकाली गई गेंद लाल रंग की है। स्थानान्तरित गेंद की काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans. थैले 1 में 3 लाल और 4 काली गेंदे है।

तथा थैले 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदें है।

मान लीजिए घटना E_1 तथा E_2 थैले 1 से लाल गेंद और काली गेंद निकालने की हों, तब

$\therefore$ $P(E_1)=\frac{3}{7}, P(E_2)=\frac{4}{7}$

घटना A : लाल रंग की गेंद निकालना

एक लाल गेंद थैले 1 से निकाल कर 2 में रख दी गई। इस प्रकार थैले 2 में 5 लाल और 5 काली गेंदें हो गई।

$\therefore$ $P(A/E_1)=\frac{5}{10}$

एक काली गेंद थैले 1 से निकालकर थैला 2 में रख दी। इस प्रकार दूसरे थैले में 4 लाल और 6 काली गेंदे हैं।

$\therefore$ $P(A/E_2)=\frac{4}{10}$

बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A)=\frac{P(E_2)P(A/E_2)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{4}{10}}{\frac{3}{7}\times\frac{5}{10}+\frac{4}{7}\times\frac{4}{10}}=\frac{16}{15+16} \qquad =\frac{16}{31}$$

पेपर – 1
कक्षा – 12 विषय – गणित

1. बहुविकल्पीय प्रश्न –

(i) यदि कोई संबंध R, समुच्चय N पर इस प्रकार परिभाषित है कि $R = \{a, b\} : a - b + 2=0, b > 6\}$ हो निम्न में से सत्य नहीं है–

(1) $(5, 7) \in R$ (2) $(6, 8) \in R$ (3) $(7, 9) \in R$ (4) $(4, 6) \in R$

(ii) $\sin\left[\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ का मान है–

(1) 0 (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

(iii) आव्यूह A तथा A^{-1} एक दूसरे के प्रतिलोम है तो

(1) $AA^{-1} = A^{-1}A$ (2) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (3) $AA^{-1} = A^{-1}A = 0$ (4) इनमें से कोई नहीं

(iv) $\begin{vmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करो यदि $\theta = \frac{\pi}{4}$

(1) 0 (2) 1 (3) –1 (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) यदि $y = \log\sqrt{x}$ हो तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान है–

(1) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (2) $\frac{1}{2x}$ (3) $\frac{1}{2x^2}$ (4) $-\frac{1}{2x^2}$

(vi) $|\sin 2x| + 4$ का न्यूनतम मान है–

(1) 5 (2) 6 (3) 4 (4) –1

(vii) e^{2x} का समकालन है–

(1) $e^{2x} + C$ (2) $2e^{2x} + C$ (3) $\frac{2}{e^{2x}} + C$ (4) $\frac{e^{2x}}{2} + C$

(viii) दीर्घवृत $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ का x – अक्ष के ऊपर क्षेत्रफल है–

(1) 36 π (2) 6π (3) 3π (4) 6

(ix) वक्र $y = \sin x$ का $x = 0$ से $x = \pi$ तक का क्षेत्रफल है–

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(x) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ की घात है–

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) अपरिभाषित

(xi) $\hat{i}.\left(\hat{i}\times\hat{k}\right)+\hat{j}.\left(\hat{i}\times\hat{k}\right)+\hat{k}.\left(\hat{i}\times\hat{j}\right)$ का मान है–

(1) 0 (2) 1 (3) –1 (4) 2

(xii) z अक्ष की दिक् कोसाइन है–

(1) 0, 0, 1 (2) 0, 1, 0 (3) 1, 0, 0 (4) 1, 1, 1

(xiii) रेखा $\vec{r}=\left(3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}\right)+\lambda\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$ तथा रेखा $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+\mu\left(-2\hat{i}+\hat{j}+m\hat{k}\right)$ परस्पर लम्बवत हो तो m का मान है–

(1) 2 (2) –2 (3) 4 (4) –4

(xiv) दो घटनाए A और B स्वतंत्र हो तो सत्य है–

(1) $P(A\cup B)=P(A)P(B)$ (2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

(3) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ (4) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

(xv) यदि $P(A)=0.80, P(B)=0.50$ तो $P\frac{(A)}{(B)}$ ज्ञात करो।

(1) $\frac{5}{8}$ (2) $\frac{8}{5}$ (3) 1 (4) ज्ञात नहीं कर सकते

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति करो–

(i) $\sin^{-1}\left[\sin\frac{3\pi}{5}\right]$ का मान ..... है।

(ii) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)-\sec^{-1}\left(-2\right)$ का मान ..... होगा।

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{2}$ हो तो x का मान ..... है।

(iv) $y=\sin\left\lfloor\cos(x)^2\right\rfloor$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ..... है।

(v) वृत की परिधि में परिवर्तन की दर त्रिज्या के सापेक्ष ..... होगा यदि त्रिज्या 5 सेमी है।

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$ का व्यापक हल ..... है।

(vii) $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ..... है।

3. अतिलघुतरात्मक प्रश्न–

(i) यदि $\begin{vmatrix}3 & x\\ x & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}$ हो तो x का मान ज्ञात करो।

(ii) $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ के लिए अवयव a_{11} और a_{21} का सहखण्ड ज्ञात करो।

(iii) सिद्ध कीजिए फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R$ एक निरन्तर वर्धमान फलन है।

(iv) $\int \sqrt{1+\cos 3x}\, dx$ का मान ज्ञात करो।

(v) फलन $f(x) = \sin^2 x$ का न्यूनतम मान कितना होता है।

(vi) $\int \left(1-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}\, dx$ का मान ज्ञात करो।

(vii) रैखिक समीकरण $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ का समाकलन गुणांक (I.F.) ज्ञात करो।

(viii) $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $(\vec{x}-\vec{a}),(\vec{x}+\vec{a}) = 8$ तो $\vec{x}$ के परिमाण का मान है।

(ix) यदि $|\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$ हो तब $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच कोण ज्ञात करो।

(x) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ पर $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ का प्रक्षेप ज्ञात करो।

खण्ड–ब

लघुतरात्मक प्रश्न

4. सिद्ध कीजिए वास्तविक संख्याओं R पर परिभाषित फलन f(x) = 3 – 4x एकैकी आच्छादक फलन है।

5. यदि $2A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो AB ज्ञात कीजिए।

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ हो तो आव्यूह A का प्रतिलाम आव्यूह ज्ञात करो।

7. निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$2x + 5y = 1$

$3x + 2y = 7$

8. $f(x) = \begin{cases} kx+1 & x \le 5 \\ 3x-5 & x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 5$ पर सतत हो तो k का मान ज्ञात करो।

9. $x^{\sin x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

10. यदि $x = a(\theta + \sin\theta)$ तथा $y = a(1-\cos\theta)$ हो तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करो।

11. $F(x) = 2x^2 - 3x$ हो तो वह अन्तराल ज्ञात करो जिसमें फलन निरन्तर वर्धमान और निरन्तर ह्रासमान हो?

12. $\int \frac{3x^2 dx}{\left(2+3x^3\right)^3}$ का मान ज्ञात करो।

13. प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y = x^2$ तथा $x = 1$ एवं $x = 2$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

14. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

15. एक पासे को दो बार उछाला जाता है और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया जाता है। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

खण्ड–स

दीर्घउत्तरीय प्रश्न

16. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \left[\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right] dx$ का मान ज्ञात करो।

अथवा

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात करो।

17. अवकल समीकरण $\left(x^2+y^2\right)dx - 2xydy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

अथवा

अवकल समीकरण $(x+y)dy + (x-y)dx = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात करो यदि $x = 1$ तथा $y = 1$

18. बिन्दुओं (-1, 0, 2) और (3, 4, 6) से होकर जाने वाली रेखाओं के कार्तीय व सदिश समीकरण ज्ञात करो।

अथवा

एक त्रिभुज की भुजाओं की दिक् कोसाइन ज्ञात करो। यदि त्रिभुज के शीर्ष (3, 5, -4), (-1, 1, 2) तथा (-5, -5, -2) है।

19. एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंद है तथा अन्य थैले में 2 लाल और 6 काली गेंद है। दोनों थैलो में से एक का चयन यादृच्छया किया जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जो लाल रंग की है तो इस गेंद के दूसरे थैले से निकलने की प्रायिकता ज्ञात करो।

अथवा

एक मशीन समुचित ढंग से स्थापित की जाती है तो 90 प्रतिशत स्वीकार्य वस्तु उत्पादित करती है। और समुचित ढंग से स्थापित नहीं होने पर मात्र 40 प्रतिशत स्वीकार्य वस्तु उत्पादित करती है। पूर्व अनुभव बताता है कि मशीन 80 प्रतिशत समुचित है। यदि निश्चित स्थापन के बाद मशीन 2 स्वीकार्य वस्तुओं का उत्पादन करती है तो मशीन के समुचित ढंग से स्थापित होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

निबंधात्मक प्रश्न

20. $\int \frac{\sqrt{(x^2+1)}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}dx$ ज्ञात कीजिए।

अथवा

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sqrt{\sin 2x}}$ का मान ज्ञात करो।

21. निम्नलिखित रेखाओं $\vec{r}=\left(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$ तथा $\vec{r}=3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+\mu\left(6\hat{i}+9\hat{j}+18\hat{k}\right)$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात करो।

अथवा

सिद्ध कीजिए रेखाएं $\frac{x+3}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{5}$ तथा $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{5}$ सहतनीय है।

22. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत z = -x + 2y का अधिकसमीकरण ज्ञात करो।

$x+y\geq 5$

$x+2y\geq 6$

$x\geq 3$

$y\geq 0$

अथवा

निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $z=200x+500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात करो।

$x+2y\geq 10$

$3x+4y\leq 24$

$x\geq 0$

$y\geq 0$

पेपर – 2
कक्षा – 12 विषय – गणित

1. बहुविकल्पीय प्रश्न –

(i) यदि $f:R\to R, f(x)=\sin x$ तथा $g:R\to R, g(x)=x^2$ तब $(fog)(x)=$

(1) $\sin x^2$ (2) $\sin^2 x$ (3) $\sin x+x^2$ (4) $\sin^2 x^2$

(ii) $\sin^{-1}2x+\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$ हो तो x का मान है–

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) $\frac{1}{4}$ (4) None of these

(iii) यदि एक आव्यूह सममित एवं विषम–सममित हो तो वह आव्यूह होगा–

(1) शून्य आव्यूह (2) त्रिभुजाकार आव्यूह (3) विकर्ण आव्यूह (4) इनमें से कोई नहीं

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$ का मान होगा–

(1) 1 (2) 0 (3) $\log_a b$ (4) $\log_b a$

(v) य $y=x\log_e x$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा–

(1) $\frac{1}{1+x}$ (2) $1+\log_e x$ (3) $\log_e(1+x)$ (4) $\frac{1}{x}$

(vi) $|x+2|-1$ का न्यूनतम मान है–

(1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) अस्तित्व नहीं है

(vii) $\int\frac{dx}{x\log_e x}$ का मान होगा।

(1) $|\log x|+C$ (2) $\frac{1}{2}+C$ (3) $\log|\log x|+C$ (4) $-\frac{1}{x^2}+C$

(viii) प्रथम चतुर्थांश में वृत $x^2+y^2=4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा–

(1) π (2) π/2 (3) π/3 (4) π/4

(ix) परवलय $x^2=4y$ तथा इसके नाभिलम्ब द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है–

(1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{8}{3}$ (4) $\frac{4}{3}$

(x) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=\cos x$ की घात होगी–

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) अपरिभाषित

(xi) यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तो $\vec{a}.\vec{b}\geq 0$ होगा। यदि

(1) $0<\theta<\frac{\theta}{2}$ (2) $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ (3) $0<\theta<\pi$ (4) $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$

(xii) निम्न में से कौनसा समूह एक रेखा की दिक्कोज्याएं नहीं है।

(1) 1, 1, 1 (2) 0, 0, -1 (3) -1, 0, 0 (4) 0, 0, 1

(xiii) रेखाएं $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{P}=\frac{z}{1}$ तथा $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$ लम्बवत हो तो P का मान होगा–

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 5

(xiv) यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएं है जहां $P(A)=\frac{1}{2}, P(A\cup B)=\frac{3}{5}$ तथा $P(B)=x$ तब x का मान होगा–

(1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{2}{10}$ (3) $\frac{3}{10}$ (4) $\frac{2}{5}$

(xv) यदि दो निष्पक्ष पासों की एक जोड़ी को एक बार फैंका जाता है तो दोनों पासों पर अंकों का योग 5 होने की प्रायकता है–

(1) $\frac{5}{36}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{18}$ (4) $\frac{1}{9}$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति करो–

(i) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ का मुख्य मान ..... है।

(ii) $\sin\left[\frac{\pi}{4}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$ का मान ..... होगा।

(iii) $3\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\pi$ हो तो $x=$ ..... होगा।

(iv) यदि $y=\cos\sqrt{x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ = ... होगा।

(v) किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपये में $R(x)=4x^2+49x+7$ है $x=6$ तो सीमान्त आय ..... होगी।

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2$ का समाकलन गुणांक $(I.F.)$ ..... होगा

(vii) $\left(\hat{i}\times j\right)\hat{k}+\hat{i}.\hat{j}$ का मान ..... होगा।

3. अतिलघुतरात्मक प्रश्न–

(i) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करो।

(ii) यदि सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ के अवयव a_{ij} का सहखण्ड A_{ij} है तो $a_{32} \times A_{32}$ का मान ज्ञात करो।

(iii) वृत के क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात करो जबकि $r = 7cm$ है।

(iv) दशाईए की $F(x) = e^x, R$ में एक निरन्तर वर्धमान फलन है।

(v) $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात करो।

(vi) $\int a^{3\log_a x} dx$ का मान ज्ञात करो।

(vii) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

(viii) सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात करो।

(ix) यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार है कि $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ और $\vec{a}.\vec{b} = 4$ तो $|\vec{a} - \vec{b}|$ ज्ञात करो।

(x) यदि $x\hat{i} + 2\hat{j} + (z-1)\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} + (y+2)\hat{j} + \hat{k}$ समान सदिश है तो x, y, z के मान है।

खण्ड–ब

लघुतरात्मक प्रश्न

4. जांच कीजिए कि क्या समुच्चय $\{1,2,3,4,5,6\}$ में $R = \{(a,b) : b = a+1\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

5. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है।

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध करो $A - A^1$ एक विषम सममित आव्यूह है।

7. सारणिक की सहायता से बिन्दु $(3,1)$ और $(9,3)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

8. F के असांतत्य के बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए यदि $F(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{यदि } x \le 2 \\ 2x-3 & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$ है।

9. यदि $y = A\sin x + B\cos x$ है तो सिद्ध करो कि $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ है।

10. $(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$ का x के सापेक्ष अवकलन करो।

11. अंतराल ज्ञात करो जिनमें $F(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ द्वारा प्रदत फलन F निरंतर वर्धमान तथा निरंतर ह्रासमान है।

12. $\int x\cos x \, dx$ ज्ञात करो।

13. दीर्घवृत $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

14. अवकल समीकरण $e^x \tan y dx+\left(1-e^x\right)\sec^2 y dy=0$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

15. 52 पतों की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी में से एक के बाद एक तीन पत्ते बिना प्रतिस्थापन किए निकाले जाते है पहले दो पतो का बादशाह और तीसरे का इक्का होने की प्रायकता ज्ञात करो।

खण्ड–स

दीर्घउत्तरीय प्रश्न

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\cos^5\phi d\phi$ का मान ज्ञात करो।

अथवा

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3/2} x\,dx}{\sin^{3/2} x+\cos^{3/2} x}$ का मान ज्ञात करो।

17. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\cot x=4x\,\text{cosec}\,x$ का विशिष्ट हल ज्ञात करो यदि $y=0$ तथा $x=\frac{\pi}{2}$ हो।

अथवा

अवकल समीकरण $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

18. दिए गए रेखा युग्म

$\vec{r}=3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$

$\vec{r}=5\hat{i}-2\hat{j}+\mu\left(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}\right)$ के मध्य कोण ज्ञात करो।

अथवा

$A(1,2,3)B(4,5,7)C(-4,3,-6)$ और $D(2,9,2)$ चार बिन्दु हो तो AB और CD रेखाओं के बीच कोण ज्ञात करो।

19. दो थैले I और II दिए है, थेले I में 3 लाल और 4 काली गेंद है जबकि थैले II में 5 लाल ओर 6 काली गेंद है। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल रंग की है इस बात की क्या प्रायकता है कि यह गेंद थैले II से निकाली गई है।

अथवा

52 ताश की गड्डी से एक पता खो जाता है शेष पतो से दो पते निकाले जाते है जो ईंट के है खो गए पते के ईंट के होने की प्रायकता क्या है?

निबंधात्मक प्रश्न

20. $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)dx$ का मान ज्ञात करो।

अथवा

$\int \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ का मान ज्ञात करो।

21. रेखाओं $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$ तथा $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ के मध्य दूरी ज्ञात करो।

अथवा

एक रेखा एक घन के विकर्णों के साथ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ कोण बनाती है तो सिद्ध करो।

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=\frac{4}{3}$

22. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $z=5x+3y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

$3x+3y\le 15, 5x+2y\le 10, x\ge 0, y\ge 0$

अथवा

आलेखीय विधि को निम्न समस्या को हल कीजिए।

निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत

$x+3y\le 60$

$x+y\ge 10$

$x\le y$

$x\ge 0, y\ge 0$

$z=3x+9y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम **QR CODE** स्कैन करें